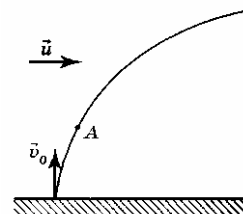


ЗОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА

9 КЛАСС. 2001 г.

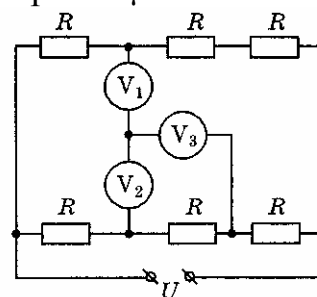
Условия задач.

74. Деревянный плот оттолкнули от берега так, что в начальный момент времени его скорость оказалась равной v_0 и направленной перпендикулярно берегу (рис.). Двигаясь по траектории, показанной на рисунке, плот через некоторое время T после начала движения оказался в точке A . Скорость реки постоянна и равна u . Графически найдите точки траектории плота, в которых он находился в моменты времени $2T$, $3T$ и $4T$.

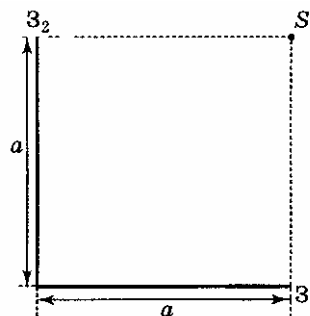


75. Тело, движущееся по горизонтальной поверхности, за промежуток времени t_1 прошло путь S_1 . Какой путь S_2 оно может пройти за последующий промежуток времени t_2 ? Коэффициент трения скольжения тела о поверхность равен μ .

76. В схеме, изображенной на рисунке, все вольтметры одинаковые, а их внутреннее сопротивление много больше всех остальных сопротивлений цепи. Найдите показания вольтметров, если сопротивление каждого из резисторов $R = 10$ Ом, а напряжение на входе цепи $U = 4,5$ В.



77. Два плоских зеркала Z_1 и Z_2 , каждое из которых имеет форму квадрата со стороной a , сложены под прямым углом. Точечный источник света S располагается на расстоянии a от каждого из зеркал (схема опыта приведена на рис.). Заштрихуйте области, находясь в которых наблюдатель сможет увидеть ровно n изображений источника S ; принять $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

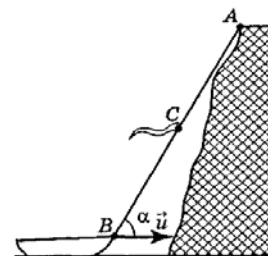


ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА

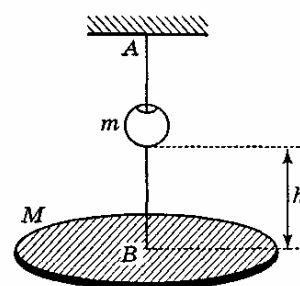
9 класс. 2000 г.

Условия задач.

78. С высокого берега озера за веревку подтягивают лодку. К веревке привязан флажок (рис.). В момент, когда флажок оказался в точке C посередине между A и B , веревка была направлена под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Найдите скорость флажка в этот момент, если известно, что скорость лодки $u = 1$ м/с.

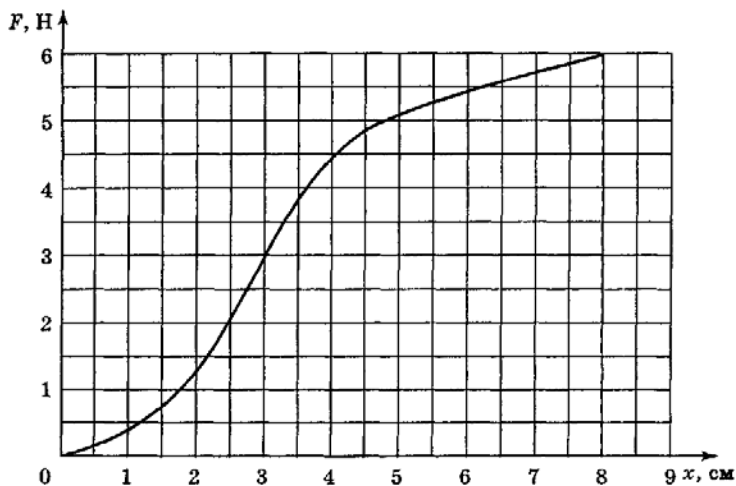


79. Горизонтальная платформа массы $M = 300$ г подвешена на резиновом жгуте AB (рис.). Жгут проходит сквозь отверстие в грузе массы $m = 100$ г. Система находится в равновесии. Затем груз отпускают без начальной скорости с высоты h относительно платформы. Найдите, при каком минимальном значении h жгут порвется, если его максимально допустимое удлинение x_k



= 8 см. Зависимость силы натяжения жгута от его удлинения $F(x)$ приведена на рис. 56.9. Удар груза о платформу считать абсолютно неупругим.

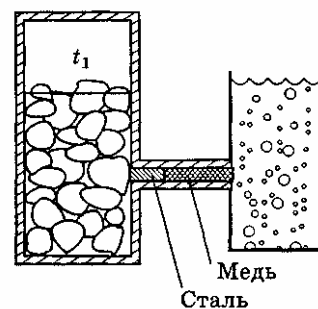
80. В теплоизолированном сосуде находится смесь воды и льда при температуре $t_1 = 0^\circ\text{C}$. Через стенку в сосуд вводится торец медного стержня, боковые стенки которого покрыты теплоизолирующим слоем. Другой торец стержня погружен в воду, кипящую при атмосферном давлении. Через время $\tau_m = 15$ мин весь лед в сосуде растаял. Если бы вместо медного стержня в этом эксперименте был использован стальной стержень того же сечения, но другой длины, то весь лед растаял бы через время $\tau_c = 48$ мин.



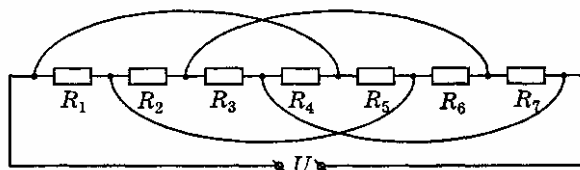
Стержни соединяют последовательно (см. рис.). Какой будет температура t в месте соприкосновения медного и стального стержней? Рассмотрите два случая:

- 1) кипящая вода соприкасается с торцом медного стержня;
- 2) кипящая вода соприкасается с торцом стального стержня.

Через какое время τ растает весь лед при последовательном соединении стержней? Будет ли это время одинаково в случаях 1 и 2?



81. Электрическая цепь составлена из семи последовательно соединенных резисторов: $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 2$ кОм, $R_3 = 3$ кОм, $R_4 = 4$ кОм, $R_5 = 5$ кОм, $R_6 = 6$ кОм, $R_7 = 7$ кОм и четырех переключек (см. рис.). Входное напряжение $U = 53,2$ В. Укажите, в каком из резисторов сила тока минимальна. Найдите эту силу тока. В каком из резисторов сила тока максимальна? Найдите ее.



Решения задач.

Решение 74. Пусть O – точка старта плота (рис. 64). В системе отсчета (CO), движущийся вниз по течению реки со скоростью u (в этой CO вода неподвижна), плот движется по прямой в направлении вектора $\vec{v} = \vec{v}_0 - \vec{u}$. Вектор $\vec{r}(t)$, соединяющий точку O с точкой A – местом нахождения плота в момент T в движущейся CO , направлен параллельно \vec{v} . В неподвижной CO вектор, соединяющий точку O с местом его нахождения, $\vec{R}(t) = \vec{r}(t) + \vec{u}(t)$.

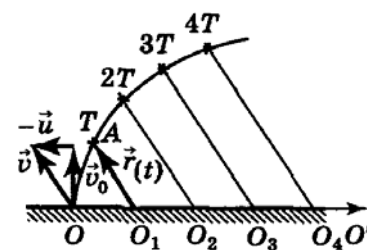


Рис. 64

Проведем через точку A прямую параллельно \vec{v} . Точку пересечения этой прямой с берегом обозначим O_1 , тогда $OO_1 = uT$. Отложим на луче OO' отрезки $OO_2 =$

$2uT$, $OO_3 = 3uT$ и $OO_4 = 4uT$. Через полученные точки O_2, O_3, O_4 проведем прямые параллельно \vec{v} . Точки пересечения этих прямых с траекторией плота будут соответствовать местам его нахождения в моменты времени $2T, 3T, 4T$.

Решение 75. Тело движется по поверхности с ускорением $-\mu g$ до тех пор, пока не остановится. Обозначим начальную скорость тела через v_0 . Возможны следующие случаи:

- (а) остановка тела произойдет на интервале времени от 0 до t_1 ;
- (б) тело остановится на интервале времени от t_1 до $t_1 + t_2$;
- (в) к моменту времени $t_1 + t_2$ тело не остановится.

Если $v_0 \leq \mu g t_1$, то $S_1 = \frac{v_0^2}{2\mu g} \leq \frac{\mu g t_1^2}{2}$, а $S_2 = 0$. Это случай (а).

Пусть теперь $v_0 > \mu g t_1$. При этом $S_1 = v_0 t_1 - \frac{\mu g t_1^2}{2}$. Отсюда $v_0 = \frac{1}{t_1} \left(S_1 + \frac{\mu g t_1^2}{2} \right)$.

К моменту времени t_1 скорость тела уменьшится до значения

$$v_1 = v_0 - \mu g t_1 = \frac{1}{t_1} \left(S_1 - \frac{\mu g t_1^2}{2} \right).$$

Если $v_1 \leq \mu g t_2$, то реализуется случай (б). Последнее неравенство можно представить в виде

$$\frac{1}{t_1} \left(S_1 - \frac{\mu g t_1^2}{2} \right) \leq \mu g t_2 \text{ или } S_1 \leq \frac{\mu g t_1^2}{2} + \mu g t_1 t_2.$$

Пройденный телом путь

$$S_2 = \frac{v_1^2}{2\mu g} = \frac{1}{2\mu g t_1^2} \left(S_1 - \frac{\mu g t_1^2}{2} \right)^2.$$

Если $v_1 > \mu g t_2$, то реализуется случай (в). При этом

$$S_1 > \frac{\mu g t_1^2}{2} + \mu g t_1 t_2, \quad S_2 = v_1 t_2 - \frac{\mu g t_2^2}{2} = \frac{t_2}{t_1} \left(S_1 - \frac{\mu g t_1^2}{2} \right) - \frac{\mu g t_2^2}{2}.$$

Решение 76. Обозначим напряжения на вольтметрах V_1, V_2, V_3 (рис. 65) через U_1, U_2, U_3 соответственно. Поскольку сопротивления вольтметров много больше сопротивлений всех резисторов, влиянием вольтметров на напряжения на резисторах в цепи можно пренебречь. Поэтому напряжение между точками 1 и 2 равно нулю; но вместе с тем оно равно $U_1 - U_2$. Следовательно, $U_1 = U_2$. Напряжение между точками 2 и 3 равно $U/3$ или $U_2 + U_3$.

Для токов, протекающих через точку 4, имеем

$I_1 + I_2 = I_3$, откуда можно записать $U_1 + U_2 = U_3 = 2U_2$, так как сопротивления вольтметров равны. Следовательно, $3U_2 = U/3$. Таким образом, показания вольтметров соответственно равны:

$$|U_1| = 0,5 \text{ В}, \quad |U_2| = 0,5 \text{ В}, \quad |U_3| = 1 \text{ В}.$$

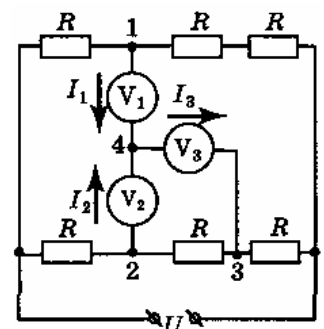


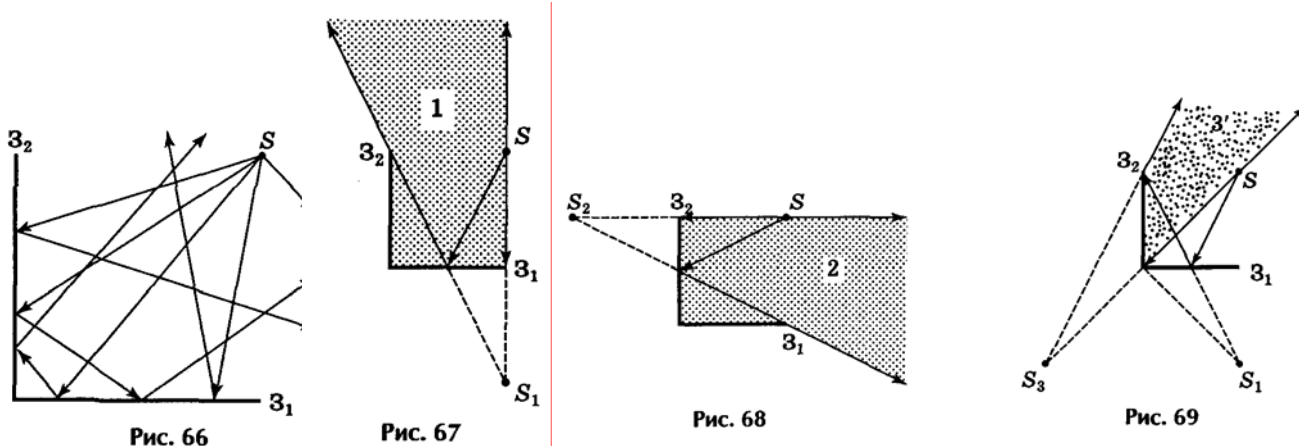
Рис. 65

Решение 77. Идущий от источника света S луч может (рис. 66):

- не отражаться от зеркал;
- отразиться только от зеркала Z_1 ;
- отразиться только от зеркала Z_2 ;
- отразиться от зеркала Z_1 и Z_2 ;
- отразиться от зеркала Z_2 и Z_1 .

В двух последних случаях луч света после отражений изменяет свое направление на противоположное, и поэтому в дальнейшем он отражаться от зеркал не будет.

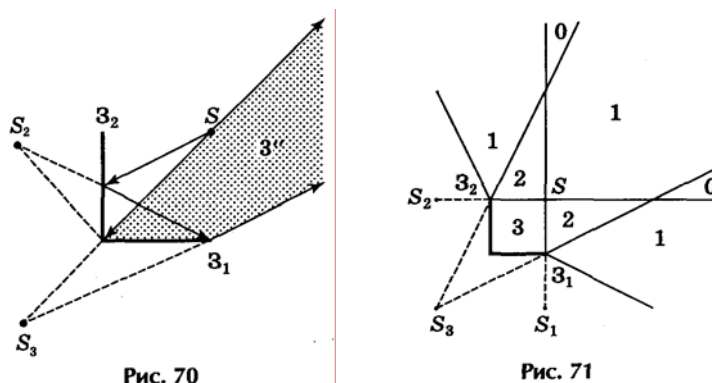
В системе зеркал образуются следующие изображения источника света S : S_1 при



отражении в зеркале Z_1 ; S_2 в зеркале Z_2 ; S_3 сначала в зеркале Z_1 , затем в зеркале Z_2 (либо сначала в зеркале Z_2 , а затем в зеркале Z_1).

Изображение S_1 будет наблюдаться в области 1 (рис. 67), изображение S_2 – в области 2 (рис. 68).

Изображение S_3 , полученное в результате отображения сначала от зеркала Z_1 , затем от зеркала Z_2 , будет наблюдаться в области $3'$ (рис. 69); это же изображение, полученное в результате отражения сначала от зеркала Z_2 , затем от зеркала Z_1 , – в области $3''$ (рис. 70).



Ответ к задаче представлен на рисунке 71. Цифры 0, 1, 2, 3 показывают количество изображений наблюдаемых в каждой из областей.

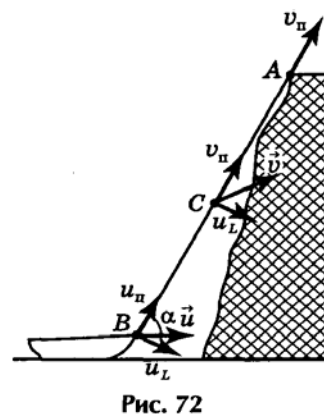
Решение 78. Рассмотрим проекции скорости флага в точке C на направления вдоль веревки и перпендикулярно ей (рис. 72):

$$v_n = u_n = u \cos \alpha,$$

где u_n – проекция скорости лодки на направление AB .

В системе отсчета, движущейся со скоростью v_n , нос лодки (точнее точка B) и флажок в данный момент времени движутся вокруг общего центра (точки A на берегу) со скоростями u_L и v_L соответственно.

Так как



$$\frac{AB}{AC} = 2, \text{ то } v_L = \frac{1}{2}u_L = \frac{1}{2}u \sin \alpha.$$

Тогда

$$v = \sqrt{v_n^2 + v_L^2} = u \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha} = 0,66 \text{ м/с.}$$

Решение 79. Введем обозначения: x_n – начальное положение равновесия платформы, $E(x)$ – потенциальная энергия растянутого жгута (рис. 73). Поскольку в положении равновесия платформы $F(x_n) = Mg = 3 \text{ Н}$, то из графика находим $x_n = 3 \text{ см}$. При падении с высоты h скорость груза в момент удара о платформу равна $v = \sqrt{2gh}$. В процессе удара груза о платформу импульс системы «груз – платформа» сохраняется:

$$mv = (M + m)u.$$

Сразу после удара ее скорость

$$u = \frac{m}{M + m} \sqrt{2gh}. \quad (1)$$

Воспользуемся законом сохранения энергии:

$$E(x_n) - (M + m)gx_n + \frac{M + m}{2}u^2 = E(x_k) - (M + m)gx_k. \quad (2)$$

Так как разность между $E(x_k)$ и $E(x_n)$ равна работе силы натяжения жгута, то ее можно найти как площадь под графиком $F(x)$, приведенном в условии задачи:

$$E(x_k) - E(x_n) \approx 25 \text{ Н}\cdot\text{см} = 0,25 \text{ Дж}. \quad (3)$$

Подставив выражение (1) в уравнение (2), получим

$$h = \frac{M + m}{m^2 g} (E(x_k) - E(x_n)) - \left(\frac{M + m}{m} \right)^2 (x_k - x_n);$$

используя данные графика $F(x)$ и (3), находим $h \approx 20 \text{ см}$.

Решение 80. Тепловой поток, т. е. количество теплоты, передаваемой в единицу времени по стержню с заданными значениями длины и поперечного сечения, зависит от материала стержня и разности температур на его концах. Когда медный и стальной стержни использовались поодиночке, по ним от кипящей воды поступало одинаковое количество теплоты Q , необходимое для плавления всей массы льда:

$$Q = K_m(t_2 - t_1)\tau_m = K_c(t_2 - t_1)\tau_c,$$

где K_m и K_c – коэффициенты пропорциональности для меди и стали соответственно, $t_2 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ – температура кипящей воды. Отсюда

$$\frac{K_m}{K_c} = \frac{\tau_c}{\tau_m} = \beta = 3,2.$$

При последовательном соединении стержней по ним протекают одинаковые тепловые потоки. Для случая 1, когда в кипящую воду погружен торец медного стержня, имеем

$$K_m(t_2 - t) = K_c(t - t_1),$$

где t – температура в месте соприкосновения стержней. Отсюда следует

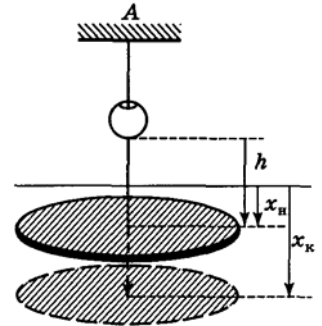


Рис. 73

$$t = \frac{\beta t_2 + t_1}{1 + \beta} = 76 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Аналогично для случая 2, когда в кипящую воду погружен торец стального стержня, получим

$$t = \frac{t_2 + \beta t_1}{\beta + 1} = 23,8 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Время τ , необходимое для плавления всей массы льда при последовательном соединении стержней, находим из соотношения

$$Q = K_m(t_2 - t_1)\tau_m = K_c(t_2 - t)\tau, \quad (1)$$

откуда

$$\tau = \tau_m \frac{t_2 - t_1}{t_2 - t} = \tau_c + \tau_m = 63 \text{ мин.}$$

Соотношение (1) записано для случая 1. Для определения τ можно использовать и другие аналогичные соотношения.

Время τ в случаях 1 и 2 одинаково.

Решение 81. Рассмотрим эквивалентную схему цепи (рис. 74).

Сопротивление $R_{1,5}$ параллельно соединенных резисторов R_1 и R_5 равно

$$R_{1,5} = \frac{R_1 R_5}{R_1 + R_5} = \frac{5}{6} \text{ кОм.}$$

Аналогично

$$R_{2,6} = \frac{3}{2} \text{ кОм и } R_{3,7} = \frac{21}{10} \text{ кОм.}$$

Таким образом, сопротивление всей верхней цепочки из 6 резисторов

$$R = R_{1,5} + R_{2,6} + R_{3,7} = 4 \frac{13}{30} \text{ кОм.}$$

Поскольку $R > R_4$, то сила тока, протекающего через R_4 , будет максимальной:

$$I_{\max} = \frac{U}{R_4} = 13,3 \text{ мА}$$

Сила тока, протекающего через верхнюю цепочку, $I = \frac{U}{R} = 12 \text{ мА.}$

Суммарная сила токов, протекающих через пары параллельных резисторов, одинакова для каждой пары; в паре же силы токов относятся друг к другу обратно пропорционально сопротивлениям. Отсюда следует, что сила тока, протекающего через R_5 , будет минимальной: $I_{\min} = 2 \text{ мА.}$

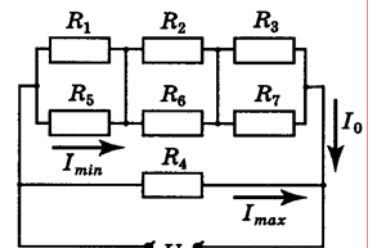


Рис. 74