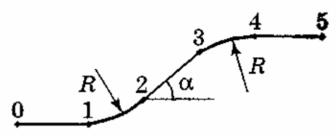
ЗОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА
9 КЛАСС. 2000 г.
Условия задач.

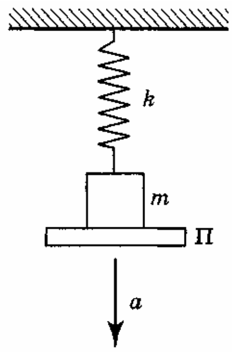
66. Оцените (численно) максимальную скорость, которую может развить парашютист в затяжном прыжке (до раскрытия парашюта). Известно, что сила сопротивления воздуха F, действующая на парашютиста, является степенной функцией его скорости v, характерного размера a и плотности воздуха ρ: $F = \alpha\rho^m \alpha^n v^k$, где α – безразмерный множитель порядка единицы, m, n, k – некоторые числа. Принять плотность воздуха ρ = 1 кг/м^3, размер a = 0,5 м.

67. Грузовик въезжает с постоянной по модулю скоростью v на горку по дороге, профиль которой изображен на рис. Дорога состоит из прямолинейных участков (горизонтальных 0 – 1, 4 – 5, под углом α к горизонту 2 – 3) и дуг окружностей (1 – 2, 3 – 4) радиуса R. В кузове грузовика находится незакрепленный груз. При каком минимальном критическом коэффициенте трения $\mu_{кр}$ груза о кузов груз будет неподвижен относительно грузовика во время движения? В каком месте дороги груз начнет скользить по кузову, если коэффициент трения окажется чуть меньше, чем $\mu_{кр}$? Ответ обоснуйте. Размеры грузовика пренебрежимо малы по сравнению с R.



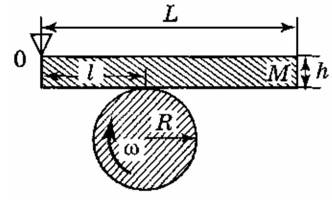
68. На открытой площадке находятся три одинаковые банки со льдом, в которые помещены одинаковые электрические нагревательные элементы. В некоторый момент эти элементы включают в три разные розетки с напряжениями U_1 = 380 В, U_2 = 220 В и U_3 = 127 В. В первой банке весь лед растаял за t_1 = 2 мин, а во второй – за t_2 = 10 мин. За какое время t_3 растает весь лед в третьей банке? Начальная температура льда во всех банках 0 °С. Сопротивление нагревательного элемента не зависит от силы протекающего тока. Считайте, что в любой момент времени температура внутри каждой банки одинакова по всему объему.

69. Груз массы m прикреплен к потолку легкой пружиной жесткости k. В начальный момент времени груз лежит на подставке П, пружина не растянута, а ее ось вертикальна (рис.). На какую максимальную длину L растянется пружина, если подставку начнут опускать с ускорением a? Постройте график зависимости $L(a)$. Попытайтесь подобрать удобные масштабы для переменных L и a.

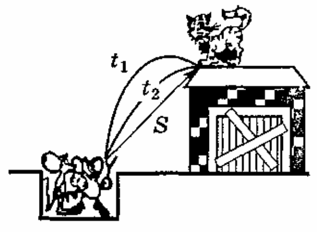


ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА
9 класс. 2000 г.
Условия задач.

70. К диску радиуса R, насаженному на горизонтальный вал двигателя, под действием силы тяжести прижимается тяжелый брусок массой M. Брусок может свободно поворачиваться относительно оси O (рис. 48.9). Длина бруска равна L,

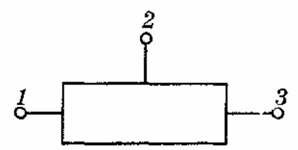


его толщина h. Точка соприкосновения бруска с диском находится на расстоянии l от левого края бруска. Коэффициент трения скольжения между бруском и диском равен μ. Предполагая, что двигатель развивает мощность P, определите угловую скорость ω вращения диска в зависимости от расстояния L. Рассмотрите случаи вращения диска по (ω^+) и против (ω^-) часовой стрелки. Постройте графики $\omega^+(l)$ и $\omega^-(l)$.



71. Кот Леопольд стоял у края крыши сарая. Два озорных мышонка выстрелили в него камнем из рогатки. Однако камень, описав дугу, через $t_1 = 1{,}2$ с упруго отразился от наклонного ската крыши сарая у самых лап кота и через $t_2 = 1{,}0$ с попал в лапу стрелявшего мышонка (рис.). На каком расстоянии S от мышей находился кот Леопольд?

72. Известно, что дистиллированную воду, очищенную от примесей, можно охладить без превращения в лед ниже температуры $t_0 = 0$ °С. В зависимости от внешнего давления процесс кристаллизации воды может начаться при некоторой температуре $t_1 < t_0$. Образовавшийся при этом лед отличается по своим физическим свойствам от обычного льда, имеющего температуру 0 °С. Определите удельную теплоту плавления льда (λ_2) при температуре $t_1 = -10$ °С. Удельная теплоемкость воды в интервале температур от –10 °С до 0 °С равна $c_1 = 4{,}17 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К); удельная теплоемкость льда в этом интервале температур равна $c_2 = 2{,}17 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К); удельная теплота плавления льда при температуре 0 °С равна $\lambda_1 = 3{,}32 \cdot 10^5$ Дж/кг.



73. Дан «черный ящик» с тремя выводами (рис.). Известно, что внутри ящика находится некоторая схема, составленная из резисторов. Если к выводам 1, 3 подключить источник напряжения $U = 15$ В и измерить с помощью вольтметра напряжения между выводами 1, 2 и 2, 3, то они оказываются равными $U_{12} = 6$ В и $U_{23} = 9$ В. Если источник напряжения подключить к выводам 2, 3, то $U_{21} = 10$ В, $U_{13} = 5$ В.

Какими будут напряжения U_{13}, U_{32}, если источник подключить к выводам 1,2? Нарисуйте возможные схемы «черного ящика» с минимальным числом резисторов. Полагая, что наименьшее сопротивление из всех резисторов равно R, найдите сопротивления остальных резисторов.

Решения задач.

Решение 66. Для определения чисел m, n, k воспользуемся соображением размерностей: сила выражается в кг·м/с^2, плотность – кг/м^3, размер a – в м, скорость – в м/с. Отсюда

$$\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг}^m}{\text{м}^{3m}}\text{м}^n\,\frac{\text{м}^k}{\text{с}^k}.$$

Приравнивая степени при кг, м, с в левой и правой частях данного равенства, получаем:

$$1 = m,\ 1 = -3 + k + n,\ -2 = -k.$$

Отсюда

$$m = 1,\ n = 2,\ k = 2,$$

$$F = \alpha\rho a^2 v^2 .$$

Установившаяся скорость парашютиста в затяжном прыжке определяется из соотношения

$$Mg = \alpha\rho a^2 v^2 .$$

Подставляя $M \approx 70$ кг, $\rho = 1$ кг/м^3, $a^2 = 0{,}25$ м^2, $\alpha \approx 1$, $g \approx 10$ м/с^2, получаем $v^2 \approx 2800$ м^2/с^2, $v \approx 50 - 60$ м/с.

<u>Решение 67.</u> При движении по наклонному под углом α прямолинейному участку дороги груз не будет скользить по кузову, если $\mu > tg\alpha$.

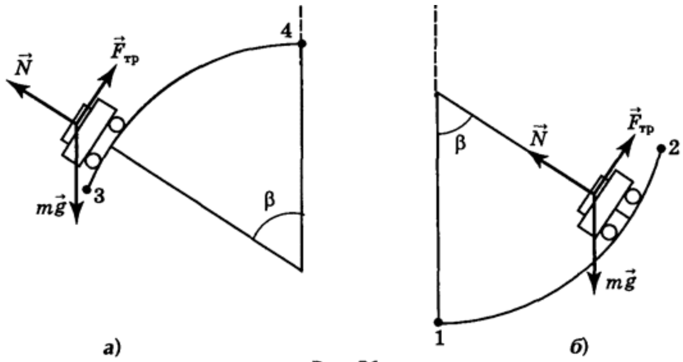


Рис. 56

Рассмотрим движение по участкам дороги, которые имеют форму дуг окружностей радиуса R. Обозначим через m массу груза, N – силу реакции со стороны кузова, $F_{тр}$ – силу трения груза о кузов. Так как центростремительное ускорение равно v^2/R, то для движения по участку дороги 3 – 4, выпуклому вверх (рис. 56, а):

$$mg\cos\beta - N = \frac{mv^2}{R},\ mg\sin\beta = F_{тр} .$$

Так как в случае отсутствия скольжения $F_{тр} < \mu N$, то груз не будет скользить при $\mu > \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta - \dfrac{v^2}{gR}}$. Отметим, что при $\cos\beta - \dfrac{v^2}{gR} < 0$ грузовик оторвется от дороги, поэтому условие движения грузовика по дороге не будет выполнено.

Аналогично, для вогнутого участка дороги 1 – 2 (рис. 56, б) получаем, что груз не будет скользить при $\mu > \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta + \dfrac{v^2}{gR}}$. Таким образом, случай $\cos\beta - \dfrac{v^2}{gR} < 0$ не соответствует условию задачи, а в случае $\cos\beta - \dfrac{v^2}{gR} \geq 0$ груз не будет скользить, если

$$\mu > \mu_{kp} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - \dfrac{v^2}{gR}} .$$

Если μ будет чуть меньше, чем $\mu_{кр}$, то груз в точке 3 начнет скользить по кузову.

<u>Решение 68.</u> Количество теплоты, подводимое ко льду, складывается из количества теплоты, втекающего из окружающей среды через стенки банки, и количества теплоты, преобразованного нагревательным элементом из электроэнергии. Во время плавления льда его температура остается постоянной (0 ^{o}C), поэтому и количество теплоты, ежесекундно подводимое ко льду через стенки банки, тоже постоянно.

Обозначим его P_1. Мощность тока нагревательного элемента равна $\frac{U^2}{R}$, где U – напряжение, подаваемое на нагревательный элемент, R – его сопротивление. Пусть для плавления всего льда, находящегося в банке, необходима энергия W. Тогда время плавления льда в банке найдем по формуле

$$t_1 = \frac{W}{P_1 + \frac{U_1^2}{R}};\ t_2 = \frac{W}{P_1 + \frac{U_2^2}{R}},$$

где t_1, t_2, U_1, U_2 – время и напряжение в случае с первой и второй банкой. Решая систему двух приведенных уравнений, найдем неизвестную величину P_1, точнее произведение

$$P_1R_1 = \frac{U_2^2t_2 - U_1^2t_1}{t_1 - t_2} = -2{,}44\cdot 10^4\ \text{В}^2.$$

Таким образом, оказывается, что $P_1 < 0$, т. е. теплота отводится ото льда в окружающую среду. Минимальное напряжение, достаточное для плавления льда (т. е. такое, что $P_1 + P_2 > 0$), определяется выражением $U_{\min} = \sqrt{-P_1R} = 156$ В. Значит, нагревательный элемент, питаемый напряжением $U_3 = 127$ В, никогда не расплавит лед, находящийся в третьей банке.

Решение 69. Рассмотрим случай $a < g$. До отрыва груза от подставки

$$a = \frac{mg - N - kx}{m},$$

где N – сила реакции опоры, x – удлинение пружины. В момент отрыва груза от подставки $N = 0$, а удлинение

$$x_o = \frac{m(g-a)}{k}.$$

В положении равновесия груза на пружине ее удлинение $x_1 = \frac{mg}{k}$. После отрыва от подставки на груз будет действовать сила $F = mg - kx$. График зависимости силы F от удлинения x пружины приведен на рис. 57. В момент начала движения подставки и в момент максимального удлинения пружины скорость груза равна нулю, в точке x_1 – скорость максимальна.

Таким образом, на участке $(0, x_1)$ увеличение кинетической энергии груза равна работе внешних сил A_1. На рис. 58 эта работа численно равна площади трапеции над осью Ox. На участке (x_1, L) уменьшается до нуля кинетическая энергия, и работа внешних сил A_2 численно равна площади треугольника под осью Ox. Ясно, что площади должны быть равны друг другу, т. е. $A_1 = A_2$:

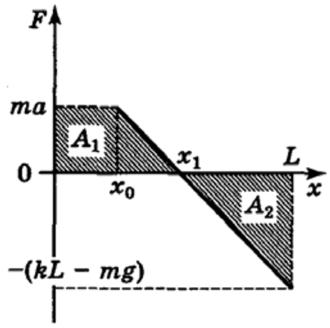


Рис. 57

$$\frac{1}{2}(x_o + x_1)ma = \frac{1}{2}(L - x_1)(kL - mg),\ \left(\frac{x_o}{x_1} + 1\right)\frac{a}{g} =,$$

$$2\frac{a}{g} - \left(\frac{a}{g}\right)^2 = \left(\frac{L}{x_1} - 1\right)^2,\ \left(\frac{L}{x_1} - 1\right)^2 + \left(\frac{a}{g} - 1\right)^2 = 1.$$

Если на графике L откладывать в единицах x_1, ускорение a в единицах g, то график $L(a)$ имеет наиболее простой вид.

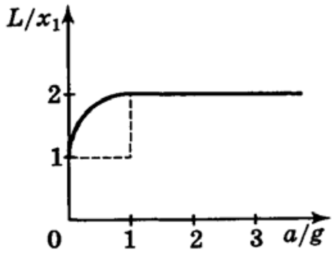


Рис. 58

Для $\frac{a}{g}<1$ соответствующая часть графика $L(a)$ представляет собой четверть дуги окружности с центром в точке $\frac{L}{x_1}=1, \frac{a}{g}=1$ (рис. 58).

В случае, если $a \geq g$, отрыв груза от подставки происходит сразу после начала движения и $L = 2x_1$. Эта часть графика $L(a)$ представляет собой прямую линию. Окончательно имеем, что максимальная длина пружины

$$L=\begin{cases} x_1\left[1+\sqrt{\frac{a}{g}\left(2-\frac{a}{g}\right)}\right] \; при\; a<g, \\ 2x_1 \;\; при\; a\geq g. \end{cases}$$

Решение 70. Рассмотрим случай вращения диска против часовой стрелки (рис. 59). Условие равновесия бруска:

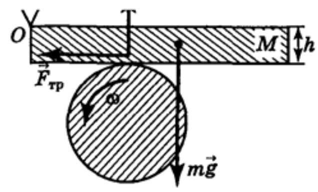


Рис. 59

$$F_{тр}h = Mg\frac{L}{2} = Nl,$$

где $F_{тр} = \mu N$. Отсюда

$$F_{тр} = \frac{MgL\mu}{2(l-\mu h)}.$$

По определению $P = Fv$. В нашем случае $F = F_{тр}$, а $v = \omega^{-}R$. Следовательно,

$$\omega^{-} = \frac{P}{F_{тр}R} = \frac{2P}{RMgL\mu}(1-\mu h) = A(1-\mu h),$$

где $A = \frac{2P}{RMgL\mu}$ – коэффициент пропорциональности между ω и l.

Задача решается при $l > \mu h$. При $l \leq \mu h$ происходит «заклинивание», двигатель не может провернуть диск.

Если диск вращается по часовой стрелке, то его угловая скорость $\omega^{+} = A(l+\mu h)$, т. е. «заклинивания» нет.

Графики $\omega^{+}(l)$ и $\omega^{-}(l)$ представлены на рис. 60.

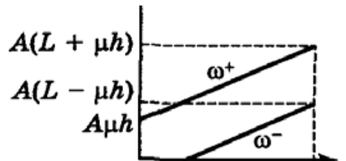


Рис. 60

Решение 71. Пусть $\vec{u}_o$ – вектор начальной скорости камня, $\vec{u}_к$ – вектор скорости камня в момент его попадания в лапу мышонка. Направим ось Ох вдоль ската крыши, ось Oy перпендикулярно ей через лапу мышонка (рис. 61). Из закона сохранения энергии следует

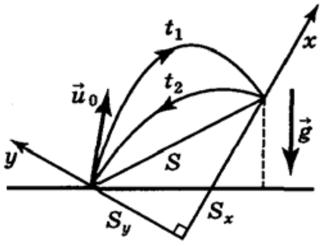


Рис. 61

$$\frac{mu_o^2}{2} = \frac{mu_к^2}{2},$$

откуда получим

$$|\vec{u}_о| = |\vec{u}_к|. \quad (1)$$

Проекция вектора скорости камня на ось Ox непосредственно перед ударом о скат крыши равны проекции скорости на эту же ось сразу после удара. Тогда

$$|u_{ox}| = |u_{кx}|. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $|u_{oy}| = |u_{кy}|$. Запишем в проекции на оси Ox и Oy уравнения движения

$$u_{ox}t + \frac{g_x t^2}{2} = S_x, \quad (3)$$

$$u_{oy}t + \frac{g_y t^2}{2} = S_y, \quad (4)$$

где g_x и g_y – проекция $\vec{g}$ на соответствующие оси. По теореме Виета уравнения (3) и (4) можно преобразовать к виду

$$S_x = -\frac{g_x t_1 t_2}{2}, \quad (5)$$

$$S_y = -\frac{g_y t_1 t_2}{2}. \quad (6)$$

Тогда $S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \dfrac{g t_1 t_2}{2}$.

Решение 72. Решение задачи поясняет рис. 62. В прямоугольной рамке указано агрегатное состояние воды и ее температура. В овальной рамке – количество теплоты, необходимо для перехода по схеме по направлению вращения часовой стрелки к очередному состоянию.

При прохождении вдоль схемы через все агрегатные состояния соблюдается баланс тепла

$$\lambda_1 m + c_2 m\Delta t = \lambda_2 m + c_1 m\Delta t.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_2 = \lambda_1 - (c_1 - c_2)\Delta t = 3{,}12 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}.$$

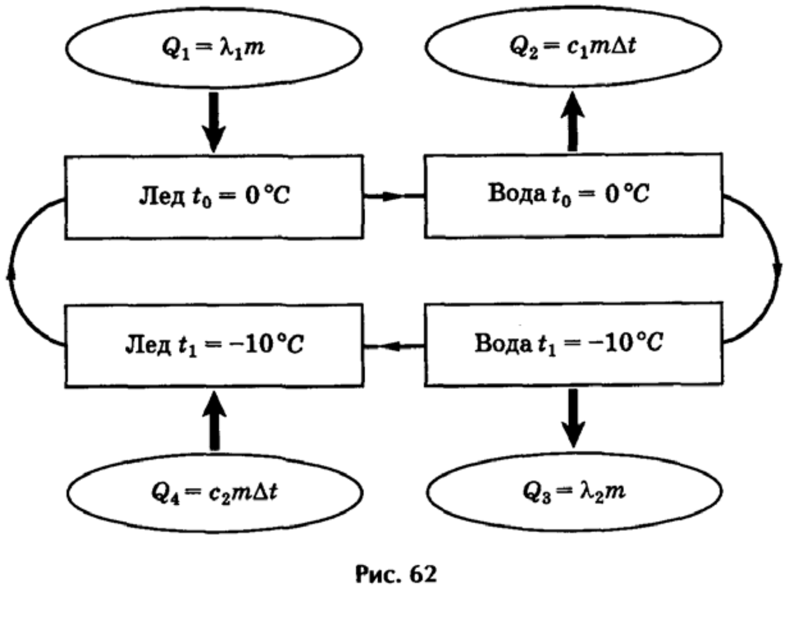


Рис. 62

Решение 73. Рассмотрим соединение резисторов «треугольником» (рис. 63, а). Тогда подключение источника напряжения к клеммам 1, 3 по ветви 1 – 2 – 3 будет течь ток I, поэтому

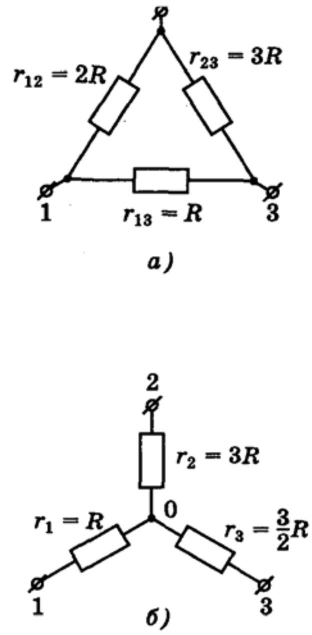


Рис. 63

$$U_{12} = Ir_{12},\, U_{23} = Ir_{23}.$$

Отсюда

$$\frac{r_{12}}{r_{23}} = \frac{U_{12}}{U_{23}} = \frac{6}{9}.$$

Аналогично, для случая подключения источника питания к выходам 2, 3 можно записать

$$\frac{r_{12}}{r_{13}} = \frac{U_{21}}{U_{13}} = \frac{10}{5}.$$

Тогда получим $r_{13} < r_{12} < r_{23}$. Значит $r_{13} = R,\, r_{12} = 2R,\, r_{23} = 3R$.

Для соединения «звездой» (рис. 63, б) получаем, что при подключении источника напряжения к клеммам 1 и 3 ток I_{13} течет только по ветви 1 – 0 – 3, поэтому

$$U_{12} = I_{13}r_1,\, U_{23} = I_{13}r_3,$$

а при подключении к выходам 2, 3

$$U_{21} = I_{13}r_2,\, U_{13} = I_{13}r_3.$$

Отсюда $r_1 < r_3 < r_2$, значит $r_1 = R,\, r_3 = \dfrac{3}{2}R,\, r_2 = 3R$.

Эти две схемы полностью эквивалентны, поэтому напряжения U_{13} и U_{23} можно вычислять по любой из них. Воспользуемся схемой «звезда»:

$$U_{13} = Ir_1,\, U_{23} = Ir_2,\, U_{13} + U_{23} = U.$$

Отсюда получаем

$$\frac{U_{23}}{U_{13}} = \frac{3}{1},\, U_{13} = \frac{15}{4} = 3{,}75\ В,\, U_{23} = \frac{45}{4} = 11{,}25\ В.$$