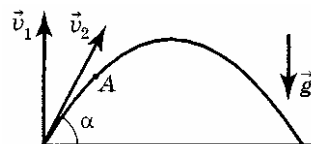


# ЗОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА

9 КЛАСС. 1998 г.

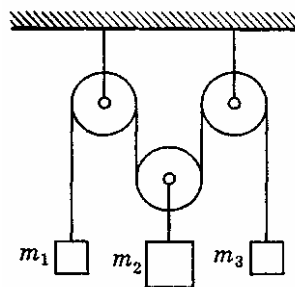
Условия задач.

**49.** Одновременно из одной точки брошены два тела с одинаковыми по модулю скоростями  $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v_0$ : первое вертикально вверх, второе – под углом  $\alpha$  к горизонту (рис.). В дальнейшем они двигались поступательно. Определите скорость второго тела относительно первого в момент времени, когда второе тело будет находиться в точке  $A$ , достигнув половины своей максимальной высоты полета. Сопротивлением воздуха пренебречь.

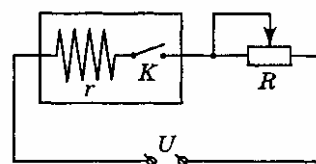


**50.** На кольцевой горизонтальной дороге радиуса  $R = 1000$  м стартует гоночный автомобиль массой  $m = 1000$  кг с постоянным касательным ускорением  $a = 2$  м/с<sup>2</sup>. Определите, в течение какого времени гонщику удастся удерживать автомобиль на дороге, если коэффициент трения скольжения шин о покрытие дороги  $\mu = 0,5$ . Ведущие колеса у автомобиля – задние, нагрузки на переднюю и заднюю оси при таком движении одинаковы. Центр масс автомобиля расположен очень низко.

**51.** Система грузов (рис.) с массами  $m_1 = m_3 = 10$  кг,  $m_2 = 20$  кг сначала находится в покое, трение отсутствует, а массы блоков и нитей пренебрежимо малы. Затем к грузу  $m_1$  прикрепили довесок  $\Delta m_1 = 1,25$  кг, к грузу  $m_3$  – довесок  $\Delta m_3 = 5$  кг и систему предоставили себе самой. В каком направлении и с какими ускорениями станут двигаться грузы  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$ ?



**52.** Фирма «Дивайс» выпускает прибор, используемый как электрический предохранитель. Этот прибор состоит из металлической проволоки сопротивлением  $r = 0,1$  Ом и массой  $m = 1$  г (удельная теплоемкость  $c = 500$  Дж/(кг·К)) и термомеханического выключателя  $K$  (рис.), размыкающего цепь в тот момент, когда проволока нагревается до критической температуры  $t_{kp} = 60$  °С. При испытании прибора его последовательно соединяют с переменным резистором  $R$  и подключают к источнику тока с напряжением  $U = 1$  В.



На начальном этапе испытаний на резисторе устанавливают сопротивление  $R_1 = 14$  Ом. Через некоторое время температура проволоки становится равной  $t_1 = 50$  °С и остается постоянной. Затем сопротивление резистора начинают медленно уменьшать. Найдите его сопротивление  $R_x$  в тот момент, когда испытываемый прибор разомкнет цепь. Известно, что при подключении прибора непосредственно к источнику тока прибор размыкает цепь спустя  $\tau = 1$  с после подключения. Зависимостью сопротивления прибора от температуры пренебречь. Температура среды, окружающей проволоку, поддерживается постоянной.

**53.** Земля из-за вращения вокруг своей оси сплюснута со стороны полюсов. Поэтому расстояние от центра Земли до полюсов (полярный радиус) меньше расстояния от центра Земли до экватора (экваториальный радиус). Оцените отношение раз-

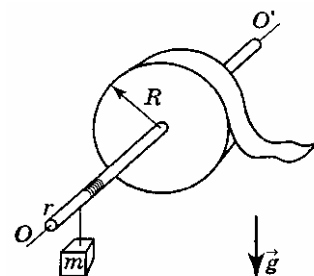
ности экваториального и полярного радиусов к среднему радиусу Земли  $R = 6370$  км. Землю считать жидким телом, окруженным тонкой эластичной оболочкой в виде земной коры.

## ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА

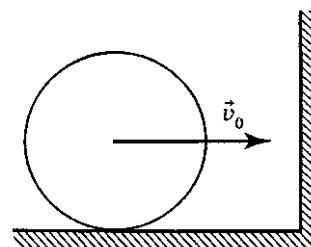
9 класс. 1998 г.

Условия задач.

**54.** На стержень радиусом  $r$  прочно насажен моток нерастяжимой липкой ленты внешним радиусом  $R$  (рис.). На этом же стержне на легкой нити висит груз массы  $m$ . Если ленту тянуть с силой  $F$ , то груз будет подниматься с постоянной скоростью. С какой силой  $F_x$  надо тянуть ленту, чтобы поднимать груз  $2m$  с той же скоростью? Стержень может свободно вращаться вокруг неподвижной оси  $OO'$ . Считать, что минимальная сила, необходимая для отрыва ленты от мотка, направлена по его радиусу и не зависит от скорости отрыва.



**55.** Тонкостенный цилиндр катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания со скоростью  $v_0 = 6$  м/с. Коэффициент трения между цилиндром и поверхностью равен  $\mu = 0,2$ . Цилиндр сталкивается с вертикальной гладкой стенкой и упруго отражается от нее (рис.).

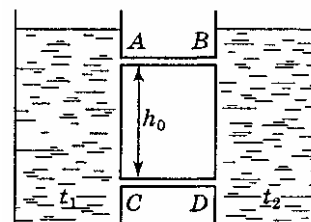


1. Найдите скорости верхней и нижней точек цилиндра непосредственно после отражения.

2. Определите скорость центра цилиндра через  $t_1 = 2$  с после столкновения со стенкой и путь, пройденный им за это время.

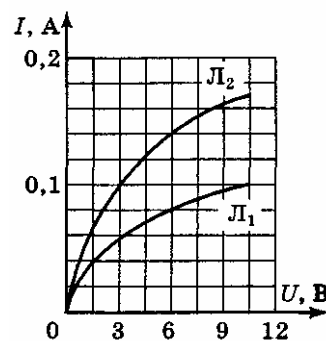
3. Определите, какой путь пройдет центр цилиндра к моментам времени  $t_2 = 4$  с.

**56.** Два высоких цилиндра, сообщающихся с атмосферой, соединены одинаковыми тонкими трубками  $AB$  и  $CD$  и заполнены водой (рис.). Расстояние между трубками равно  $h_0 = 1$  м. Температуры воды в цилиндрах поддерживаются постоянными и равными  $t_1 = 100$  °С и  $t_2 = 40$  °С. Плотность воды зависит от температуры по закону  $\rho = \rho_0[1 - \beta(t - t_0)]$ , где  $t_0$  – комнатная температура,  $\rho_0 = 1,0 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> – плотность воды при комнатной температуре, коэффициент  $\beta = 2,1 \cdot 10^{-6}$  град<sup>-1</sup>. В такой системе возникает круговая циркуляция воды по трубкам между цилиндрами. Известно, что масса воды, перетекающей по трубкам в единицу времени, пропорциональна разности давлений на их концах.



Определите разность давлений  $\Delta p_{AB}$  и  $\Delta p_{CD}$  на концах трубок  $AB$  и  $CD$ .

**57.** Лампочки  $L_1$  и  $L_2$ , имеющие вольтамперные характеристики, показанные на рис., соединили последовательно и подключили к источнику с напряжением  $U = 12$  В. 1. Найдите силу тока, текущего при этом через лампочку  $L_1$ . 2. Чему равна сила тока, протекающая через лампочку  $L_2$ , если лампочки  $L_1$  и  $L_2$  последовательно соединить с  $L_3$ , имеющей такую же вольтамперную характеристику, как и  $L_2$ , и подключить эту «гирлянду» к источнику с напряжением  $U = 12$  В?



### Решения задач.

**Решение 49.** Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{v}_{o1} + \vec{g}t, \\ \vec{v}_2 = \vec{v}_{o2} + \vec{g}t \end{cases}$$

Из рис. 39 видно

$$\vec{v}_{отн} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_{o2} - \vec{v}_{o1}, \quad v_{отн} = 2v_o \sin\left(\frac{90^\circ - \alpha}{2}\right) = v_o \sqrt{2(1 - \sin \alpha)}.$$

**Решение 50.** Рассмотрим силы, действующие на автомобиль в момент времени, когда он должен сорваться с трека. В этот момент силы трения, действующие на задние колеса, достигают своего максимального значения, равного

$$F = \mu \frac{m}{2} g,$$

и направлена под углом  $\alpha$  к вектору скорости (рис. 40). Тогда

$$F_1 = F \sin \alpha = \frac{m}{2} \cdot \frac{v^2}{R}, \quad F_2 = F \cos \alpha = ma.$$

Возводя оба уравнения в квадрат и складывая, получаем

$$F^2 = \left(\frac{ma^2 t^2}{2R}\right)^2 + (ma)^2,$$

откуда время равно

$$t = \frac{\sqrt{R}}{a} (\mu^2 g^2 - 4a^2)^{1/4} = 26,5 \text{ с.}$$

**Решение 51.** Нить нерастяжима, следовательно, сила натяжения  $T$  по всей длине одинакова. Пусть  $m'_1 = m_1 + \Delta m_1$ ,  $m'_3 = m_3 + \Delta m_3$ . Для грузов запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} m'_1 a_1 = m'_1 g - T, & (1) \\ m_2 a_2 = m_2 g - 2T, & (2) \\ m'_3 a_3 = m'_3 g - T. & (3) \end{cases}$$

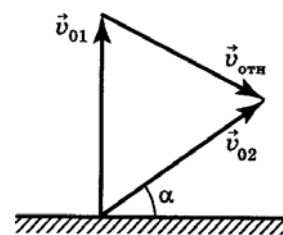


Рис. 39

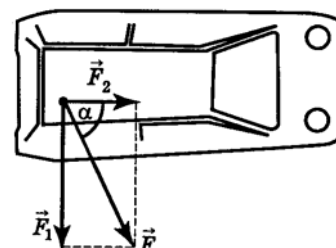


Рис. 40

Запишем уравнение, связывающее между собой ускорения грузов:

$$a_2 = -\frac{a_1 + a_3}{2}. \quad (4)$$

У нас есть четыре неизвестных  $a_1, a_2, a_3, T$  и четыре уравнения. Решая их, находим

$$a_1 = 0, a_2 = -\frac{1}{8}g = -0,125g, a_3 = \frac{1}{4}g = 0,25g.$$

Следовательно, первый груз останется в покое, второй будет двигаться вверх, а третий – вниз.

**Решение 52.** В установившемся режиме мощность тока в проволочке равна мощности потока тепла в окружающую среду:

$$\frac{U^2 r}{(R + r)^2} = A(t - t_o), \quad (1)$$

где  $A$  – некоторая константа.

Записав соотношение (1) для начального момента времени и для момента размыкания цепи, найдем выражение для искомого сопротивления переменного резистора  $R_x$ :

$$R_x = (R_1 + r) \sqrt{\frac{t_1 - t_o}{t_{kp} - t_o}} - r, \quad (2)$$

где  $t_o$  – температура окружающей среды.

При непосредственном подключении прибора к источнику тока на малое время  $\tau$  почти все тепло, выделяющееся на проволочке, идет на нагрев:

$$\frac{U^2}{r} \tau = cm(t_{kp} - t_o). \quad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) следует:

$$R_x = (R_1 + r) \sqrt{\frac{cmr(t_1 - t_{kp}) + U^2 \tau}{U^2 \tau}} - r.$$

Подставив числовые значения, получим  $R_x = 10$  Ом.

**Решение 53.** Пусть давление в центре Земли  $p$ . Рассмотрим два тонких столба жидкости  $OA$  и  $OB$  сечением  $S$  и длиной  $R_{\pi}$  (полярный радиус), расположенных вдоль оси вращения Земли и в экваториальной плоскости (рис. 41). Оценочно будем считать, что они притягиваются к центру Земли с одинаковой силой  $F$ . Условие равновесия столба  $OA$ :  $F = pS$ . На столб  $OB$  давит «довесок» толщиной  $\Delta R$ . Центр масс столба  $OB$  движется с ускорением

$$a = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R_{\pi}}{2},$$

где  $T = 24$  ч. По второму закону Ньютона

$$F - pS + \rho g S \Delta R = \rho S R_{\pi} a.$$

Из записанных уравнений с учетом того, что замена  $R_{\pi}$  на  $R$  мало изменит чи-

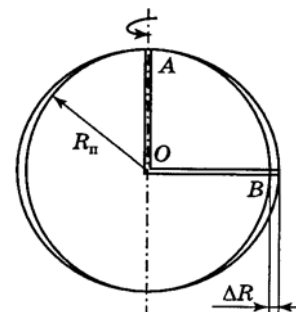


Рис. 41

словой ответ, получаем

$$\frac{\Delta R}{R} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R}{2g} \approx \frac{1}{582}.$$

Отметим, что табличное значение составляет  $\frac{1}{297}$

**Решение 54.** Разложим силу натяжения ленты на две составляющие: касательную  $F_t$  и нормальную  $F_n$  к поверхности мотка в точке отрыва. Касательную компоненту  $F_t$  находим из уравнения моментов для мотка, которое запишем для двух случаев:

$$F_t R = mgr, F_{tx} R = 2mgr.$$

Тогда сила, с которой следует тянуть ленту в этих случаях, равна

$$F = \sqrt{F_t^2 + F_n^2}, F_x = \sqrt{F_{tx}^2 + F_n^2}.$$

Отсюда получаем

$$F_x = \sqrt{F_{tx}^2 + F_n^2} = \sqrt{4m^2 g^2 \frac{r^2}{R^2} + F^2 - m^2 g^2 \frac{r^2}{R^2}} = \sqrt{3m^2 g^2 \frac{r^2}{R^2} + F^2}.$$

**Решение 55.** До удара при чистом качении скорость поступательного движения цилиндра  $v_0$  и угловая скорость  $\omega$  связаны соотношением  $v_0 = \omega R$ , где  $R$  – радиус цилиндра.

1. После упругого удара скорость поступательного движения цилиндра изменяет знак, а угловая скорость вращательного движения остается прежней. Цилиндр начинает двигаться с проскальзыванием. Сразу после отражения цилиндра от стенки скорость его верхней точки  $B$  (рис. 42) равна  $v_B = v_0 - \omega R = 0$ , а нижней точки  $A$  будет  $v_A = v_0 + \omega R = 2v_0$ .

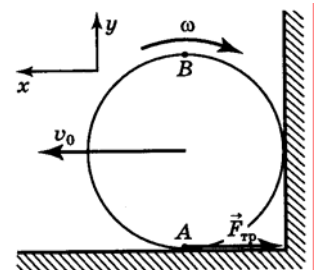


Рис. 42

2. После отражения оба движения цилиндра – поступательное и вращательное – оказываются равнозамедленными, так как на него будет действовать сила трения скольжения  $F_{mp} = \mu mg$ . Цилиндр будет двигаться с ускорением

$a = \frac{F_{mp}}{m} = \mu g$ . Через время  $t_1$  скорость цилиндра

$v_1 = v_0 - \mu g t_1 = 2$  м/с и пройденный путь  $S_1 = v_0 t_1 - \frac{a t_1^2}{2} = 8$  м.

3. Цилиндр остановится через время  $\tau = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{\mu g} = 3$  с. К этому моменту прекратится и вращательное движение. Пройденный путь в этот момент будет равен

$$S = v_0 \tau - \frac{a \tau^2}{2} = \frac{v_0^2}{2\mu g} = 9 \text{ м.}$$

Следовательно, через  $t_2 = 4$  с скорость цилиндра равна нулю, а пройденный путь равен 9 м.

**Решение 56.** Из условия сохранения массы разности

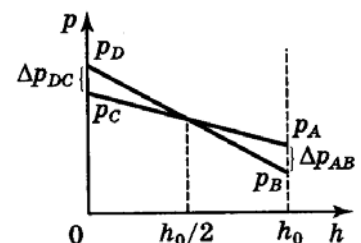


Рис. 43

давлений на концах трубки должны быть одинаковы:

$$|\Delta p_{AB}| = |\Delta p_{CD}|.$$

Распределение давлений в цилиндре (в условных единицах) по высоте, считая от нижней трубки, показано на рис. 43. Давление изменяется по линейному закону. Из рисунка следует, что на уровне  $h_0/2$  давление в цилиндрах одинаково. Следовательно,

$$\Delta p_{AD} = -\Delta p_{CB} = \Delta \rho g \frac{h_0}{2},$$

где  $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1 = \rho_0 \beta (t_1 - t_2) = 1,26 \cdot 10^{-1} \text{ кг/м}^3$ .

Тогда  $\Delta p = 0,63 \text{ Па}$ .

**Решение 57.** 1. При последовательном соединении лампочек через каждую из них течет ток  $I$ . При этом напряжение  $U_1(I)$  на лампочке  $L_1$  и напряжение  $U_2$  на лампочке  $L_2$  связаны соотношением

$$U_1(I) = U - U_2(I),$$

где  $U$  – напряжение источника тока.

Точка пересечения графиков зависимостей  $U_1(I)$  и  $U - U_2(I)$  (рис. 44) определяет напряжения на лампочках и силу тока, текущего через них:

$$I = 0,094 \text{ А.}$$

2. При последовательном соединении трех лампочек надо построить суммарную вольтамперную характеристику  $U_{23}(I)$  лампочек  $L_2$  и  $L_3$ , соединенных последовательно, после чего задача сводится к предыдущей. Поскольку вольтамперные характеристики лампочек  $L_2$  и  $L_3$  по условию совпадают,  $U_{23}(I) = 2U_2(I)$  (рис. 45). Силу тока, текущего через лампочку  $L_1$ , в случае последовательного соединения  $L_1, L_2$  и  $L_3$  найдем из графика (рис. 46)  $I = 0,084 \text{ А}$ .

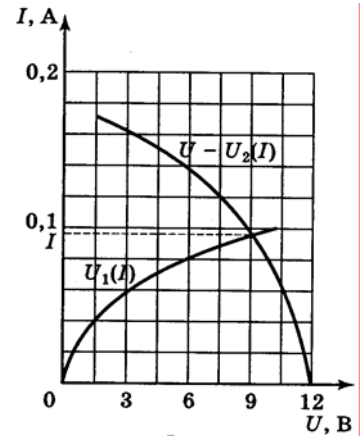


Рис. 44

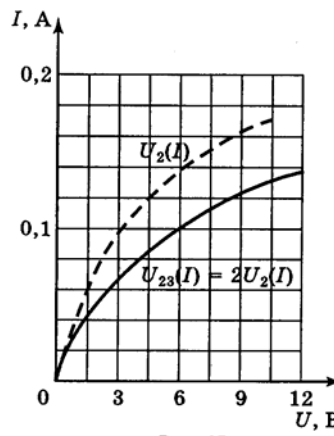


Рис. 45

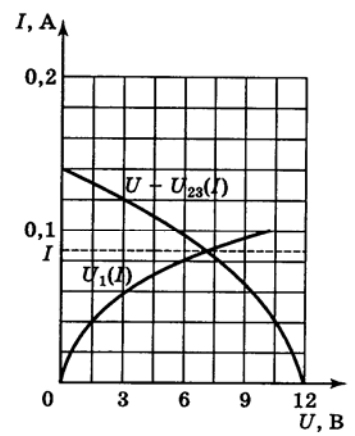


Рис. 46