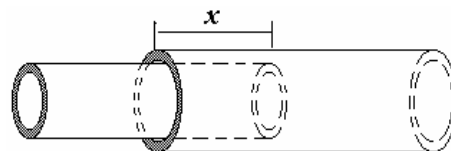


**Условия задач. Теоретический тур.**

1. Молодой, но талантливый физик Федя сконструировал переменный резистор, состоящий из двух трубок изготовленных из одинакового материала. Внешний радиус одной из них практически совпадает с внутренним диаметром второй, поэтому одна трубка может двигаться внутри другой. Для облегчения скольжения Федя смазал их солидолом.



Проведя элементарные расчеты, Федя получил очевидный результат: сопротивление резистора должно линейно зависеть от длины перекрывающейся части трубок  $x$ . (Федя – хороший математик, поэтому никаких математических ошибок в его расчетах не было!)

Однако проведенный эксперимент привел к парадоксальному на первый взгляд результату: во-первых, сопротивление резистора оказалось значительно больше рассчитанного, во-вторых, это сопротивление оказалось обратно пропорциональным величине  $x$ .

1. Воспроизведите расчеты, проведенные Федей. Какую линейную функцию он получил?

2. Объясните результаты эксперимента. Получите формулу, описывающую полученные экспериментальные результаты.

Необходимые параметры установки задайте самостоятельно.

2. В установке, показанной на рисунке, массы грузов равны  $m_0 = 0,25$  кг,  $m_1 = 0,55$  кг,  $m_2 = 0,75$  кг. Грузы связаны легкой нитью, переброшенной через систему блоков. Блоки 1,2 неподвижные, блок 3 подвижный (к его оси прикреплен нижний груз), все блоки невесомы, радиус блока 3 равен  $r = 2,3$  см. Найдите скорости всех грузов и угловую скорость блока 3 через время  $\tau = 0,22$  с после начала движения. Трением грузов о горизонтальные поверхности и в осях блоков пренебречь, считать, что нить движется по блокам без проскальзывания. Ускорение свободного падения считать равным  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

3. В последнее время появились медицинские грелки, разогрев которых происходит за счет кристаллизации жидкости, находящейся внутри грелки. Кристаллизация инициируется с помощью катализатора (в этом случае кристаллизация проходит в широком диапазоне температур).



Внутренний объем грелки представляет собой параллелепипед размерами  $a \times h \times l$ . Кристаллизация начинается с одного из торцов, граница отвердевшей области движется с малой постоянной скоростью  $v$ . Найдите зависимость температуры грелки от времени (с начала кристаллизации). Чему равна максимальная температура грелки?

Удельная теплота кристаллизации равна  $\lambda$ , удельная теплоемкость рабочего вещества в жидком состоянии равна  $C_0$ , а в твердом состоянии на  $\eta = 10\%$  меньше, начальная температура равна  $t_0$ , изменением плотности вещества, теплоемкостью сосуда и потерями теплоты в окружающую среду пренебречь. Считайте, что в лю-

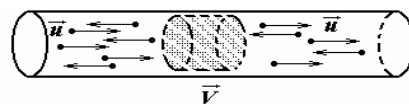
бой момент времени температура во всех точках грелки одинакова (вследствие высокой теплопроводности вещества).

Рекомендуем в ходе решения задачи (при необходимости) использовать приближенную формулу  $\frac{1}{1+z} \approx 1-z$ , погрешность которой при  $z \leq 0,1$  не превышает 1 %.

4. 1. Пусть при движении тела в вязкой среде сила сопротивления пропорциональна скорости движения  $F_{\text{сопр}} = \beta_1 V$ . На это тело начинает действовать постоянная сила  $F_0$ . Постройте примерный график зависимости скорости тела от времени, найдите скорость установившегося движения, оцените время достижения этой скорости. Масса тела равна  $m$ .

2. Пусть при движении тела в вязкой среде сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости движения  $F_{\text{сопр}} = \beta_2 V^2$ . На это тело начинает действовать постоянная сила  $F_0$ . Постройте примерный график зависимости скорости тела от времени, найдите скорость установившегося движения, оцените время достижения этой скорости. Масса тела равна  $m$ .

3. Рассмотрите следующую простейшую модель возникновения силы сопротивления воздуха. Пусть цилиндрический поршень площадью поперечного сечения  $S$  движется без трения внутри очень длинной горизонтальной трубы. Внутри трубы параллельно ее оси движутся маленькие частицы одинаковой массы  $m$  (которая значительно меньше массы поршня), причем скорости всех частиц одинаковы и равны  $u$  (приблизительно половина этих частиц движется в одном направлении, а остальные в противоположном). Концентрация частиц (число частиц в единице объема) равна  $n$ . Удары частиц о поршень можно считать абсолютно упругими. Найдите зависимость средней силы сопротивления, действующей на поршень со стороны частиц, от скорости тела  $V$ . Рассмотрите случаи  $V < u$  и  $V > u$ . Постройте примерный график этой зависимости.



### Решение задач.

Решение 1. Основная ошибка, допущенная «изобретателем», заключалась в том, что он не учел электрического сопротивления контакта между трубками.

Если пренебречь этим сопротивлением, то общее сопротивление резистора рассчитывается по формуле

$$R_{\text{теор}} = \rho \left( \frac{L_1 - x}{S_1} + \frac{x}{S_1 + S_2} + \frac{L_2 - x}{S_2} \right) = \rho \left( \frac{L_1}{S_1} + \frac{L_2}{S_2} \right) - \rho \left( \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_1 + S_2} + \frac{1}{S_2} \right) x, \quad (1)$$

где  $L_1, L_2$  – длины трубок,  $S_1, S_2$  – площади их торцов,  $\rho$  – удельное электрическое сопротивление материала трубок. Как видно, эта зависимость действительно линейна.

Если же сопротивление контакта значительно превышает сопротивления самих трубок, то зависимость сопротивления от величины  $x$  будет иной (электрический ток по смазке протекает перпендикулярно поверхности трубок)

$$R_{\text{эксн}} = \rho_1 \frac{h}{2\pi r x}, \quad (2)$$

где  $h$  – ширина зазора между трубками,  $r$  – внешний радиус внутренней трубки,  $\rho_1$  – удельное электрическое сопротивление смазки. Эта зависимость обратно пропорциональная.

Решение 2. Запишем основной закон динамики для каждого из грузов в проекции на вертикальную ось с учетом условий невесомости нити и блоков, а также отсутствия трения в осях блоков:

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= T \\ m_2 a_2 &= T \\ m_o a_o &= m_o g - 2T \end{aligned}, \quad (1)$$

Все обозначения стандартные и очевидные. Поскольку трение грузов о плоскость отсутствует, то в горизонтальном направлении система является замкнутой, т.е. положение ее центра масс не может измениться по горизонтали. С учетом этого получаем следующее уравнение

$$m_1 a_1 = m_2 a_2. \quad (2)$$

Кроме того, учтем кинематическую связь между ускорениями грузов для подвижного блока

$$a_1 + a_2 = 2a_o. \quad (3)$$

Выразив из (2) – (3) значения  $a_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} a_o$ ;  $a_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} a_o$  и подставив их в (1)

найдем

$$\begin{aligned} T &= \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} a_o; \quad a_o = \frac{m_o (m_1 + m_2)}{m_o (m_1 + m_2) + 4m_1 m_2} g = 0,16g = 1,6 \text{ м/с}^2; \\ a_1 &= \frac{2m_o m_2}{m_o (m_1 + m_2) + 4m_1 m_2} g = 0,19g = 1,9 \text{ м/с}^2; \\ a_2 &= \frac{2m_o m_1}{m_o (m_1 + m_2) + 4m_1 m_2} g = 0,13g = 1,3 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \end{aligned}$$

Зная ускорения всех грузов, найдем их скорости через время  $\tau$  после начала движения системы

$$\begin{aligned} v_o &= a_o \cdot \tau = 0,35 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 35 \frac{\text{см}}{\text{с}}; \\ v_1 &= a_1 \cdot \tau = 0,42 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 42 \frac{\text{см}}{\text{с}}; \\ v_2 &= a_2 \cdot \tau = 0,28 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 28 \frac{\text{см}}{\text{с}}. \end{aligned}$$

Для нахождения угловой скорости  $\omega$  вращения блока 3 заметим, что поскольку веревка нерастяжима, то скорости движения  $v_1$  и  $v_2$  могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} v_1 &= v_o + \omega \cdot r \\ v_2 &= v_o - \omega \cdot r \end{aligned}, \quad (4)$$

где  $r$  – радиус блока. Из (4) находим

$$\omega = \frac{v_1 - v_2}{2r} = 3,0 \text{ рад/с.}$$

**Решение 3.** Пусть в некоторый момент времени  $\tau$  длина отвердевшей части равна  $x = v\tau$ .

За последующий малый промежуток времени  $\Delta t$  в ходе кристаллизации выделится количество теплоты

$$\Delta q = \lambda \rho a h \Delta x = \lambda \rho a h v \Delta t, \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность вещества в грелке. Эта теплота пойдет на нагревание как жидкой, так и отвердевшей части содержимого грелки на  $\Delta t$  градусов. Поэтому это же количество теплоты можно выразить с помощью известных формул

$$\Delta q = (C_o \rho a h (l - x) + C_o (1 - \eta) \rho a h x) \Delta t. \quad (2)$$

Обратите внимание, что суммарная теплоемкость грелки зависит от соотношения жидкой и отвердевшей части вещества, следовательно, и от времени. Из уравнения теплового баланса

$$(C_o \rho a h (l - x) + C_o (1 - \eta) \rho a h x) \Delta t = \rho a h v \Delta \tau. \quad (3)$$

следует, что скорость изменения температуры сложным образом зависит от времени (очевидно, что  $x = v\tau$ ):

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{\lambda v}{C_o (l - \eta v \tau)}. \quad (4)$$

Для упрощения последнего выражения воспользуемся приближенной формулой, приведенной в условии задачи,

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{\lambda v}{C_o (l - \eta v \tau)} = \frac{\lambda v}{C_o l \left(1 - \frac{\eta v \tau}{l}\right)} \approx \frac{\lambda v}{C_o l} \left(1 + \frac{\eta v \tau}{l}\right) = \frac{\lambda v}{C_o l} + \frac{\lambda v^2 \eta}{C_o l^2} \tau. \quad (5)$$

Таким образом, скорость изменения температуры линейно зависит от времени. Эта зависимость полностью аналогична зависимости скорости движения при равноускоренном движении. Используя эту математическую аналогию, можем записать закон изменения температуры со временем

$$t = t_o + \frac{\lambda v}{C_o l} \tau + \frac{\lambda v^2 \eta}{C_o l^2} \cdot \frac{\tau^2}{2}. \quad (6)$$

*Еще раз отметим, что нелинейная (квадратичная) зависимость температуры от времени связана с изменением теплоемкости системы.*

Максимальная температура может быть определена из последнего выражения, полагая в нем  $\tau = l/v$ ,

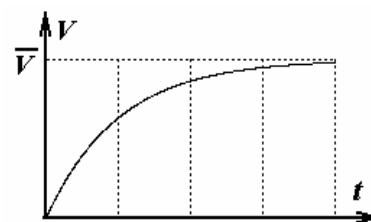
$$t_{\max} = t_o + \frac{\lambda}{C_o} \left(1 + \frac{\eta}{2}\right). \quad (7)$$

**Решение 4.** 1. Уравнение второго закона Ньютона для движения в вязкой среде имеет в данном случае вид

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = F_o - \beta_1 v. \quad (1)$$

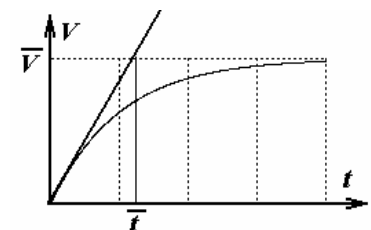
Из этого уравнения следует, что ускорение изменяется с течением времени, причем с ростом скорости ускорение уменьшается. При достижении равенства силы сопротивления и силы  $F_o$ , ускорение обращается в нуль. Следовательно, скорость установившегося движения  $\bar{V}$  определяется соотношением

$$\bar{V} = \frac{F_o}{\beta_1}. \quad (2)$$



Качественный вид зависимости скорости от времени показан на рисунке.

Для оценки времени достижения установившейся скорости, положим, что тело движется с постоянным ускорением (равным ускорению в начальный момент времени



$a_o = \frac{F_o}{m}$ ) до тех пор, пока скорость не достигнет значения

(2):

$$\bar{t} = \frac{\bar{V}}{a_o} = \frac{m}{\beta_1}. \quad (3)$$

Этот способ получения оценки проиллюстрирован на следующем рисунке.

Отметим, что рассматриваемая зависимость точно описывается функцией

$$v = \frac{F_o}{\beta_1} (1 - \exp(-\beta_1 t)).$$

2. Рассмотрение этой части задачи полностью аналогично предыдущей:

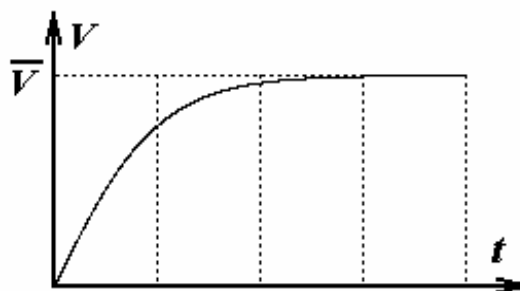
– уравнение движения

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = F_o - \beta_2 v^2; \quad (4)$$

– скорость установившегося движения

$$\bar{V} = \sqrt{\frac{F_o}{\beta_2}}. \quad (5)$$

– графика зависимости скорости от времени качественно не отличается от рассмотренного ранее;



– время достижения установившейся скорости (обратите внимание – в этом случае это время зависит от действующей силы)

$$\bar{t} = \frac{\bar{V}}{a_o} = \frac{m}{\sqrt{F_o \beta_2}}. \quad (6)$$

Отметим, что в данном зависимости скорости от времени точно описывается функцией

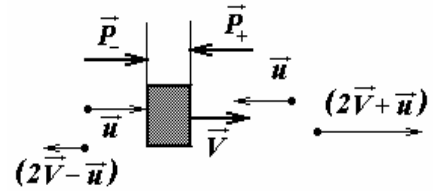
$$v = \sqrt{\frac{F_o}{\beta_2}} \cdot \frac{1 - \exp(-\alpha t)}{1 + \exp(-\alpha t)}, \text{ где } \alpha = 2 \frac{\sqrt{F_o \beta_2}}{m}.$$

3. Сила сопротивления возникает из-за столкновений поршня с движущимися частицами, которые сообщают поршню импульс.

Рассмотрим случай малой скорости поршня  $V < u$ . О переднюю грань поршня ударятся частицы, которые движутся навстречу поршню, число этих столкновений за промежуток времени  $\Delta t$  рассчитывается по формуле

$$v_+ = \frac{1}{2}nS(V + u)\Delta t. \quad (7)$$

В результате столкновения проекция скорость частицы на направление движения поршня изменяется от  $-u$  до  $(u + 2V)$  – это утверждение легко доказать перейдя в систему отсчета, связанную с поршнем. Итак, в результате одного столкновения поршень получит импульс



$$p = m(u + 2V + u) = 2m(u + V). \quad (8)$$

Следовательно, полный импульс, полученный передней гранью поршня, равен

$$P_+ = v_+ p = mnS(u + V)^2 \Delta t. \quad (9)$$

Аналогично, можно подсчитать импульс, который получит поршень, от частиц, которые ударяются о заднюю грань поршня (разумеется, это частицы, догоняющие поршень)

$$P_- = mnS(u - V)^2 \Delta t. \quad (10)$$

Таким образом, полный импульс, полученный поршнем равен разности

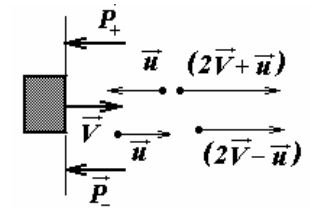
$$P = P_+ - P_- = mnS\Delta t((u + V)^2 - (u - V)^2) = 4mnS\Delta t u V. \quad (11)$$

Учитывая, что действующая сила равна импульсу, полученному в единицу времени, получим выражение для силы сопротивления

$$F_{\text{сопр}} = \frac{P}{\Delta} = 4mnSuV. \quad (12)$$

Как видно, в рассмотренной модели сила сопротивления прямо пропорциональна скорости движения поршня.

В случае больших скоростей  $V > u$ , следует учесть, что передняя грань поршня будет сталкиваться не только с частицами, которые движутся ему навстречу, но и частицами движущимися в том же направлении, что и поршень (который их догоняет). Столкновений же с задней гранью не будет. В остальном же расчет переданного импульса остается прежним и приводит к результату



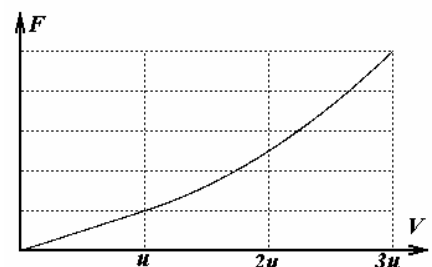
$$P = P_+ + P_- = mnS\Delta t((u + V)^2 + (u - V)^2) = 2mnS\Delta t(u^2 + V^2). \quad (13)$$

А сила сопротивления в этом случае равна

$$F_{\text{сопр}} = 2mnS(u^2 + V^2) \quad (14)$$

и зависит от квадрата скорости.

Заметим, что молекулы реальных газов имеют различные скорости, поэтому указать для них точную границу между «малой» и «большой» скоростью невозможно.



Республиканская олимпиада. 9 класс. Витебск. 2003 г.

График зависимости силы сопротивления от скорости представляет собой участок прямой и соприкасающуюся с ней параболу.