

Handwritten signature or mark.

*А.В. Андриевский
А.А. Мишук
Л.Г. Маркович
А.И. Слободянюк*



*Республиканская
физическая
олимпиада*

*Теоретический тур
Решения задач*

*г. Минск
2007 год.*

II класс.

1.1 «Оптическая бистабильность»

В интерферометре Фабри-Перо коэффициент пропускания зависит от набега фазы

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} nL \quad (1)$$

при однократном прохождении световой волной пространства между зеркалами. В сильных световых полях (на практике для этого годится излучение лазера) вещества начинают проявлять нелинейные свойства, например, показатель преломления начинает зависеть от интенсивности света. Поскольку величина показателя преломления определяет набег фазы ψ , это означает, что коэффициент пропускания интерферометра, заполненного нелинейным веществом, зависит от интенсивности падающего на него излучения. Ясно, что показатель преломления зависит от интенсивности (точнее, от квадрата модуля электрической напряженности) световой волны **внутри** интерферометра, но теоретический расчет показывает, что она пропорциональна интенсивности **выходящего** излучения, поэтому в условии сказано $n = n_0 + \gamma I_{\text{вых}}$.

Итого, получается

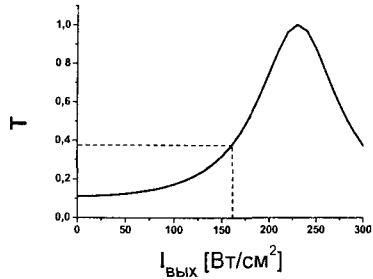
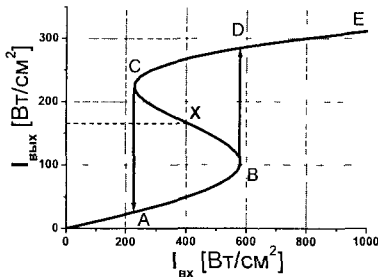
$$I_{\text{вых}} = \frac{I_{\text{вл}}}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} L(n_0 + \gamma I_{\text{вых}})\right)}, \quad (2)$$

$$I_{\text{вых}} \left[1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} L(n_0 + \gamma I_{\text{вых}})\right) \right] = I_{\text{вл}} \quad (3)$$

Решать уравнение (3) относительно $I_{\text{вых}}$ достаточно непросто, но этого и не требуется – необходимо построить график зависимости $I_{\text{вых}}$ от $I_{\text{вл}}$. Для этого можно просчитать обратную зависимость $I_{\text{вл}}$ от $I_{\text{вых}}$ (что гораздо проще), а потом построить необходимый график

Как видно по графику, зависимость $I_{\text{вых}}$ от $I_{\text{вл}}$ не является функцией, поскольку на участке между 200 кВт/см^2 и 600 кВт/см^2 одному значению абсциссы соответствует несколько ординат точек графика. Какие же из них будут реализовываться на практике?

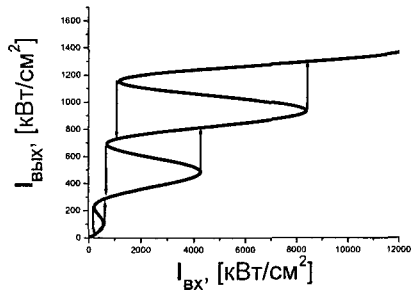
Для ответа на этот вопрос построим зависимость коэффициента пропускания интерферометра от выходной интенсивности.



Рассмотрим точку X на участке BC, соответствующую $I_{ВХ} = 400 \text{ Вт/см}^2$. Предположим, что случайно $I_{ВХ}$ увеличилось. Это приведет к уменьшению $I_{ВЫХ}$ и, следовательно, к уменьшению коэффициента пропускания, а это приведет к дальнейшему уменьшению $I_{ВЫХ}$, что означает, что участок BC- неустойчивый и на практике он реализовываться не будет. Аналогично можно показать, что участки АВ и CD – устойчивые. А это означает, что при увеличении $I_{ВХ}$ от нуля до 200 Вт/см^2 изменение $I_{ВЫХ}$ будет соответствовать графику OABDE, а при обратном уменьшении до нуля – EDCAO.

В данной системе возникает бистабильность – когда одной входной интенсивности соответствует два устойчивых значения выходной интенсивности, причем то, какое из них будет реализовано, зависит от направления изменения $I_{ВХ}$.

Если же далее увеличивать входную интенсивность, возникает ещё несколько устойчивых состояний интерферометра – это называется мультистабильностью



1.2 «Грязный космос»

Пусть ракета прошла расстояние x внутри облака пыли (рис. 2). Тогда «заметенный» ракетой объем содержит массу пыли $\Delta m = \rho V = \rho Sx$.

Согласно условию, пыль массой Δm прилипла к ракете, следовательно ее масса возросла, а скорость, соответственно, уменьшилась.

Согласно закону сохранения импульса (система замкнута) найдем скорость ракеты в этот момент

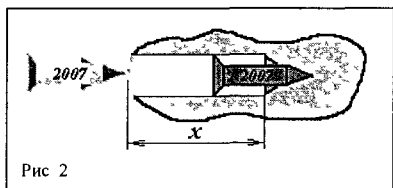


Рис 2

$$m v_0 = (m + \Delta m) v \Rightarrow v(x) = \frac{m v_0}{m + \rho S x}. \quad (1)$$

Скорость ракеты при вылете из облака найдем, подставив в (1) значение $x = L$

$$v(x=L) = \frac{m v_0}{m + \rho S L}.$$

Для нахождения времени t движения ракеты в облаке перепишем (1) в виде

$$\frac{1}{v(x)} = \frac{1}{v_0} + \frac{\rho S}{m v_0} \cdot x \quad (2)$$

Тогда

$$t = \int dt = \int_0^L \frac{dx}{v(x)} = \int_0^L \left(\frac{1}{v_0} + \frac{\rho S}{m v_0} \cdot x \right) dx = \frac{1}{v_0} \cdot x \Big|_0^L + \frac{\rho S}{m v_0} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = \frac{L}{v_0} \left(1 + \frac{\rho S L}{2m} \right) \quad (3)$$

Заметим, что задачу вполне можно решить и без интегрирования. Для этого следует подобрать «удобные» координаты, в которых площадь под графиком имеет размерность времени.

Рассмотрим зависимость «обратной скорости» $\frac{1}{v}$ от пройденного расстояния x . Малое расстояние Δx ракета пролетает за время $\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \left(\frac{1}{v} \right) \cdot \Delta x$, что соответствует площади выделенного элементарного столбика на рис. 3.

Таким образом, суммарная площадь под приведенным графиком на участке от нуля до $x = L$ равна времени t движения ракеты внутри облака.

В данном случае суммирование элементарных времен Δt сводится к нахождению площади трапеции

$$t = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v} \right) \cdot L = \frac{L}{v_0} \left(1 + \frac{\rho S L}{2m} \right). \quad (4)$$

Заметим, что плотность межзвездного вещества (пыли, газа, плазмы) мала ($\rho \rightarrow 0$), но конечна. Как следует из (4), эффект торможения ракеты межзвездной пылью может оказаться существенным при протяженных ($L \rightarrow \infty$) космических путешествиях.

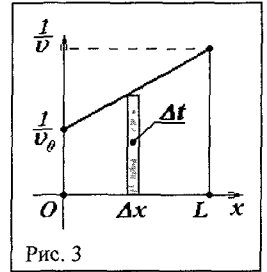


Рис. 3

Задание 2. «У природы нет плохой погоды»

2.1. «Средняя температура»

Единица площади Солнца, как абсолютно черного тела, по закону Стефана-Больцмана излучает мощность σT_c^4 . Со всей поверхности Солнца излучается мощность

$$P_c = 4\pi R_c^2 \sigma T_c^4, \quad (1)$$

причем при распространении в пустом пространстве эта мощность остается постоянной

$$\Phi_0 4\pi L^2 = P_c = const \quad (2)$$

Поток солнечного излучения на земной орбите (и вблизи поверхности Земли) равен

$$\Phi_0 = \sigma T_c^4 \left(\frac{R_c}{L} \right)^2, \quad (3)$$

$$\Phi_0 = 1380 \text{ Вт/м}^2 \quad (4)$$

Глядя из центра Солнца, земной шар виден, как круг радиусом R_j . На Землю попадает излучение Солнца в пределах этого круга. Падающая на Землю мощность равна

$$P_{пад} = \pi R_j^2 \Phi_0 \quad (5)$$

Земля, как абсолютно черное тело (по условию) излучает в окружающее пространство мощность

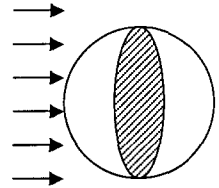
$$P_{изл} = 4\pi R_j^2 \sigma T_j^4 \quad (6)$$

Условие баланса энергии

$$P_{пад} = P_{изл} \quad (7)$$

$$T_j = T_c \sqrt{\frac{R_c}{2L}}, \quad (8)$$

$$T_j = 279 \text{ К} \quad (9)$$



2. «Весна, лето, осень, зима и снова весна»

Мощность солнечного излучения, падающего на северное полушарие, равна произведению потока излучения Φ_0 на площадь проекции северного полушария (так, как оно видно с Солнца)

$$P = \Phi_0 S_{пр} \quad (10)$$

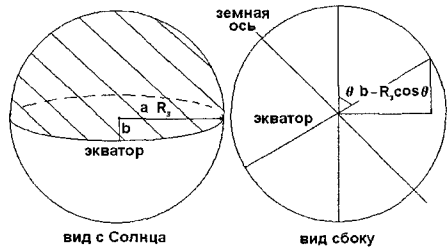
Из-за того, что ось Земли наклонена к плоскости земной орбиты под углом $\theta = 66,5^\circ$, экватор в проекции виден как дуга эллипса. Только в дни осеннего и весеннего равноденствия экватор виден в проекции, как отрезок прямой. Площадь проекции северного полушария изменяется по достаточно сложному закону, но в данной задаче использовано приближение $S_{пр} = S_0 + S_1 \cos \Omega t$

Очевидно, что угловая частота Ω совпадает с угловой скоростью движения Земли вокруг Солнца

$$\Omega = \frac{2\pi}{t_j} = 1,72 \cdot 10^{-2} \text{ суток}^{-1} = 1,99 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1} \quad (11)$$

Для оценки постоянных A и B можно воспользоваться значением площади проекции северного полушария в самый длинный день

$$S_{\max} = \frac{\pi R_j^2 + \pi R_j^2 \cos \theta}{2} = \frac{\pi R_j^2}{2} (1 + \cos \theta) \quad (12)$$



и площади проекции в самый короткий день

$$S_{\min} = \frac{\pi R_j^2 - \pi R_j^2 \cos \theta}{2} = \frac{\pi R_j^2}{2} (1 - \cos \theta) \quad (13)$$

Принцип отыскания площади проекции северного полушария понятен из рисунка и не требует специальных комментариев

Максимальная мощность, падающая на северное полушарие, равна

$$P_{\max} = \Phi_0 \frac{\pi R_j^2}{2} (1 + \cos \theta) = 2\pi R_j^2 (A + B), \quad (14)$$

а минимальная

$$P_{\min} = \Phi_0 \frac{\pi R_j^2}{2} (1 - \cos \theta) = 2\pi R_j^2 (A - B) \quad (15)$$

Отсюда постоянные A и B равны

$$A = \Phi_0 / 4 = 345 \text{ Bm} / \text{m}^2, \quad (16)$$

$$B = (\Phi_0 \cos \theta) / 4 = 138 \text{ Bm} / \text{m}^2 \quad (17)$$

Солнечная энергия, падающая на северное полушарие от Солнца, идет на нагрев воды, покрывающей земной шар и на компенсацию потерь энергии, излучаемой Землей в космическое пространство Энергетический баланс за время dt

$$2\pi R_j^2 h \rho c \, dT + 2\pi R_j^2 \sigma T^4 \, dt = 2\pi R_j^2 (A + B \cos \Omega t) \, dt, \quad (18)$$

$$h \rho c \frac{dT}{dt} + \sigma T^4 = (A + B \cos \Omega t) \quad (19)$$

Полученное уравнение – нелинейное неоднородное дифференциальное уравнение В общем случае решать его достаточно сложно Но в данной задаче логично предположить, что температура будет изменяться по закону

$$T(t) = T_0 + T_1 \cos(\Omega t - \varphi), \quad (20)$$

причем

$$T_1 < T_0 \quad (21)$$

Решение стоит искать в таком виде потому, что раз вынуждающая сила (правая часть уравнения (19)) гармонически изменяется во времени, то и решение будет изменяться гармонически В данной задаче рассматривается модель климата Земли, поэтому амплитуда колебаний температуры T_1 намного меньше средней температуры T_0

Отличная от нуля теплоемкость земной поверхности вызывает отставание колебаний температуры по фазе от колебаний падающего потока энергии, что и выражается слагаемым $-\varphi$ под косинусом

Итак, необходимо найти постоянные T_0, T_1, φ Для этого подставим предполагаемое решение (20) в уравнение (19)

$$-h \rho c \Omega T_1 \sin(\Omega t - \varphi) + \sigma (T_0 + T_1 \cos(\Omega t - \varphi))^4 = (A + B \cos \Omega t), \quad (22)$$

Поскольку $T_1 \ll T_0$ (правда, это надо проверить после того, как мы найдем T_0 и T_1)

можно воспользоваться формулой приближенных вычислений $(1 + \xi)^n \approx 1 + n\xi$

$$(T_0 + T_1 \cos(\Omega t - \varphi))^4 = T_0^4 (1 + \frac{T_1}{T_0} \cos(\Omega t - \varphi))^4 \approx T_0^4 (1 + 4 \frac{T_1}{T_0} \cos(\Omega t - \varphi)), \quad (23)$$

и еще раскроем $\sin(\Omega t - \varphi)$ и $\cos(\Omega t - \varphi)$

$$\sin(\Omega t - \varphi) = \sin \Omega t \cos \varphi - \cos \Omega t \sin \varphi, \quad (24)$$

$$\cos(\Omega t - \varphi) = \cos \Omega t \cos \varphi + \sin \Omega t \sin \varphi \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & -h \rho c \Omega T_1 \sin \Omega t \cos \varphi + h \rho c \Omega T_1 \cos \Omega t \sin \varphi + \sigma T_0^4 + \\ & + 4 \sigma T_0^3 T_1 \cos \Omega t \cos \varphi + 4 \sigma T_0^3 T_1 \sin \Omega t \sin \varphi = A + B \cos \Omega t \end{aligned} \quad (26)$$

Синус и косинус изменяются независимо друг от друга во времени Чтобы равенство (26) выполнялось в любой момент времени, необходимо, чтобы

$$\sigma T_0^4 - A = 0, \quad (27)$$

$$h\rho c\Omega T_1 \sin \varphi + 4\sigma T_0^3 T_1 \cos \varphi = B, \quad (28)$$

$$-h\rho c\Omega T_1 \cos \varphi + 4\sigma T_0^3 T_1 \sin \varphi = 0. \quad (29)$$

Итак, получилась система из трех уравнений с тремя неизвестными. Из (28) находим постоянную T_0

$$T_0 = \sqrt[4]{A/\sigma} = 279\text{K}. \quad (30)$$

Из (28) находим фазу φ

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{h\rho c\Omega}{4\sigma T_0^3}, \quad (31)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{h\rho c\Omega}{4\sigma T_0^3}\right) = 40,3^\circ, \quad (32)$$

что соответствует задержке по времени на

$$\tau = \frac{40,3^\circ}{360^\circ} \cdot 365,25 \text{ суток} \approx 41 \text{ сутки} \quad (33)$$

Это значит, что самый теплый день наступает на 41 день позже самого длинного. Именно поэтому июль теплее, чем июнь, несмотря на то, что больше всего солнечной энергии поступает на северное полушарие именно в июне.

Для определения постоянной T_1 можно подставить φ в уравнение (28), а можно возвести (28) и (29) в квадрат и сложить, тогда получим:

$$T_1 = \frac{B}{\sqrt{(h\rho c\Omega)^2 + (4\sigma T_0^3)^2}} = 21,4\text{K}. \quad (34)$$

Как видно, $T_1/T_0 \approx 0,077$, поэтому исходное предположение (21) верно и можно пользоваться формулой приближенных вычислений (23).

3. «Парниковый эффект»

Солнце и Земля излучают, как абсолютно черное тело. Но температура поверхности Солнца $T_c = 5800\text{K}$, а температура поверхности Земли (см. п. 1) $T_3 = 279\text{K}$, поэтому максимум спектра излучения Солнца и Земли приходится на разные длины волн: для Солнца - 500нм , а для Земли - $10,4\text{мкм}$.

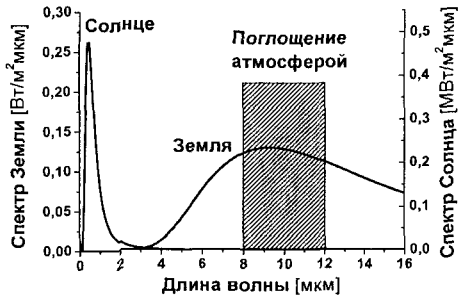
Поскольку атмосфера Земли поглощает излучение с длинами волн от $8,0\text{мкм}$ до $12,0\text{мкм}$, то излучение поверхности Земли будет поглощаться атмосферой гораздо сильнее, чем излучение Солнца. Это значит, что атмосфера будет служить для Земли «щубой», затрудняя отвод тепла во внешнее пространство, и температура поверхности Земли с атмосферой будет больше, чем в случае Земли без атмосферы.

На графике представлены спектры излучения Солнца и Земли, причем в разных масштабах, что понятно – ведь вся излучаемая интенсивность (а это площадь под графиком) по закону Стефана-Больцмана

$$I = \sigma T^4, \quad (35)$$

и у Солнца приблизительно в $2 \cdot 10^5$ раз больше, чем у Земли.

Интегральную интенсивность излучения Солнца и Земли находим



по формуле (35) (см таблицу 1)

Интенсивность, приходящуюся на интервал длин волн, поглощаемых атмосферой, находим по приближенной формуле, приведенной в условии. Значение функции берем в середине интервала длин волн $\lambda_0 = 10,0 \text{ мкм}$

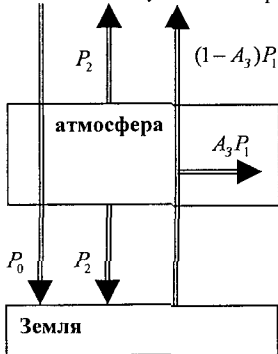
$$I_{\text{полн}} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda_0^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1} (\lambda_{\text{макс}} - \lambda_{\text{мин}}) \quad (36)$$

В таблице 1 представлены значения полной интенсивности, излучаемой Землей и Солнцем, значения поглощаемой интенсивности (по приближенной формуле и точно посчитанные при помощи ЭВМ) и коэффициент поглощения $A = I_{\text{полн}} / I$. Как видно, приближенные значения $I_{\text{полн}}$ незначительно отличаются от точных

	Земля	Солнце
$I \text{ Вт/м}^2$	344	$1,01 \cdot 10^8$
$I_{\text{полн}} \text{ (прибл.)}, \text{Вт/м}^2$	86,1	$6,04 \cdot 10^4$
$I_{\text{полн}} \text{ (точно)}, \text{Вт/м}^2$	83,1	$6,87 \cdot 10^4$
A	0,250	$6,8 \cdot 10^{-4}$

Доля поглощаемого излучения Солнца A_0 мала, поэтому можно говорить, что атмосфера вовсе не поглощает солнечное излучение $A_0 \approx 0$ (37). Для Земли же поглощение составляет $A_1 = 0,250$ (38)

Для нахождения температуры земной поверхности необходимо рассмотреть баланс падающей и излучаемой энергии, схематически показанный на рисунке



На земную поверхность падает солнечное излучение мощностью

$$P_0 = \sigma T_c^4 \left(\frac{R_c}{L} \right)^2 \pi R_3^2, \quad (39)$$

которое не поглощается в атмосфере

Сама атмосфера излучает мощность P_2 в космос и такую же мощность на земную поверхность

Земля излучает мощность

$$P_1 = \sigma T_3^4 4\pi R_3^2, \quad (40)$$

причем часть A_1 от этой мощности поглощается в атмосфере, а оставшаяся часть $(1 - A_1)$ уходит в космос

Условие энергетического баланса (когда не происходит нагрева поверхности и атмосферы Земли)

$$P_0 + P_2 = P_1 \quad (\text{для поверхности}), \quad (41)$$

$$2P_2 = A_1 P_1 \quad (\text{для атмосферы}) \quad (42)$$

Отсюда с учетом формул (40) и (42)

$$P_1 = \frac{P_0}{1 - A_1/2}, \quad (43)$$

$$\sigma T_3^4 4\pi R_3^2 = \frac{\sigma T_c^4 \left(\frac{R_c}{L} \right)^2 \pi R_3^2}{1 - A_1/2}, \quad (44)$$

$$T_3 = T_c \sqrt{\frac{R_c}{2L}} \sqrt[4]{\frac{1}{1 - A_1/2}} = 289K. \quad (45)$$

Это и есть так называемый «парниковый эффект» - земная атмосфера пропускает солнечные лучи, но задерживает излучение Земли, поэтому средняя температура планеты оказывается больше, чем температура планеты без атмосферы.

Замечание. Несомненно, для определения коэффициента поглощения надо находить излучаемую Землей интенсивность и поглощаемую атмосферой интенсивность, соответствующую истинной температуре Земли, т.е. не 279K, а 289K. Однако коэффициент поглощения в данном температурном интервале слабо зависит от температуры, поэтому для оценки можно пользоваться его значением для температуры поверхности Земли $T_3 = 279K$.

4. «Ядерная зима»

Опять рассмотрим баланс энергии. Если степень зачернённости атмосферы равна η , то в атмосфере поглотится солнечная мощность ηP_0 , а поверхности Земли достигнет только мощность $(1-\eta)P_0$. Излучение же Земли будет поглощаться полностью в интервале длин волн от 8,0мкм до 12,0мкм, а в других длинах волн интенсивность будет уменьшаться из-за зачернённости атмосферы. Это значит, что от излучаемой Землей мощности P_1 атмосфера будет поглощать мощность

$$P_1(A_1 + \eta(1 - A_1)). \quad (48)$$

Условие энергетического баланса:

$$(1-\eta)P_0 + P_2 = P_1 \quad (\text{для поверхности}), \quad (46)$$

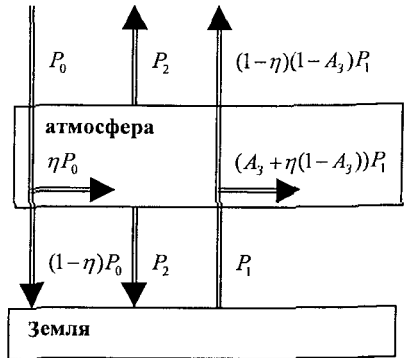
$$2P_2 = \eta P_0 + (A_1 + \eta(1 - A_1))P_1 \quad (\text{для атмосферы}). \quad (47)$$

Решение системы(48), (49) приводит к результату

$$P_1 = P_0 \frac{1-\eta/2}{1 - (A_1 + \eta(1 - A_1))/2}, \quad (48)$$

$$T_3 = T_c \sqrt{\frac{R_c}{2L}} \sqrt[4]{\frac{1-\eta/2}{1 - (A_1 + \eta(1 - A_1))/2}} \approx 285K. \quad (49)$$

Для Земли парниковый эффект играет очень большую роль – не будь в атмосфере парниковых газов, средняя температура на планете была бы гораздо ниже. При совершенно задымленной атмосфере температура поверхности планеты опустится до 279K. Как видно, в случае задымленной атмосферы температура поверхности оказывается меньше. В связи с этим данный эффект получил название «ядерная зима», хотя, причиной его не обязательно может стать взрыв ядерного оружия. Годится извержение вулкана или падение крупного метеорита – лишь бы атмосфера стала пропускать меньше солнечного излучения.



Задание 3. «Охлаждение светом»

- 1 Пусть скорость атома после поглощения равна v_1 . Запишем законы сохранения энергии и импульса в неподвижной системе координат

$$\frac{mv_0^2}{2} + E_\phi = \frac{mv_1^2}{2} + E_1 \quad (1),$$

$$mv_0 - \frac{E_\phi}{c} = mv_1 \quad (2)$$

Очевидно, что скорость изменится незначительно, поэтому справедливо следующее преобразование

$$v_0^2 - v_1^2 = (v_0 + v_1)(v_0 - v_1) = 2v_0(v_0 - v_1) \quad (3)$$

Приведем уравнения (1) и (2) к следующему виду

$$mv_0(v_0 - v_1) = E_1 - E_\phi \quad (4),$$

$$mc(v_0 - v_1) = E_\phi \quad (5)$$

Разделив (4) на (5), получим

$$\frac{v_0}{c} = \frac{E_1}{E_\phi} - 1 \quad (6)$$

Тогда

$$E_\phi = \frac{E_1}{1 + \frac{v_0}{c}} = E_1 \left(1 - \frac{v_0}{c} \right) \quad (7),$$

$$\text{т к } \frac{v_0}{c} \ll 1 \quad (8)$$

Результат (7) можно было получить сразу, если помнить про эффект Доплера. В случае движения фотонов навстречу атомам, их энергия может быть несколько меньше, энергии резонансного поглощения атомов

- 2 Так энергия фотона отличается от E_1 на малую величину, то в закон сохранения импульса можно вместо E_ϕ подставить E_1 и получить значение Δv

$$\Delta v = \frac{E_1}{mc} \quad (9),$$

где

$$m = \frac{m_{Na}}{N_A} = 3,8 \cdot 10^{-26} \text{ кг} \quad (10)$$

Численное значение Δv

$$\Delta v = 0,029 \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 3 \frac{\text{см}}{\text{с}} \quad (11)$$

Полученное значение Δv соответствует потери скорости в процессе поглощения. За поглощением последует излучение. Изменение скорости при излучении будет таким же. Однако при излучении фотон может вылететь в любом направлении и в среднем скорость вдоль Ox не изменится.

В этом, собственно, и заключается принцип охлаждения.

- 3 Максимальное отклонение от направления движения, будет наблюдаться при излучении фотона в перпендикулярном направлении. Тогда отклонение от первоначального направления

$$\alpha = \frac{\Delta v}{v_0} \approx 6 \cdot 10^{-5} \text{ рад} \quad (12)$$

Видим, что отклонение незначительно, поэтому может произойти много тысяч актов поглощения и испускания, прежде чем атом покинет пучок.

4. Для определения промежуток скоростей, в котором атомы могут поглощать

фотоны с энергией $E_\phi = E_1 \left(1 - \frac{v_0}{c}\right)$, запишем следующее выражение:

$$\left(E_1 + \frac{\Delta E}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{(v_0 + \Delta v_0)}{c}\right) = E_1 \left(1 - \frac{v_0}{c}\right) \quad (13).$$

Преобразуя (13), при этом, отбрасывая очень маленькие величины (такие, как $\frac{\Delta E}{2} \frac{v_0}{c}$

и, тем более, $\frac{\Delta E}{2} \frac{\Delta v_0}{c}$), получим:

$$\Delta v_0 = c \frac{\Delta E}{2E_1} \approx 3 \text{ М/с} \quad (14).$$

Таким образом, в процессе охлаждения задействованы атомы, скорости которых лежат в довольно узком интервале. Приблизительно после 200 актов охлаждения, этот диапазон полностью опустеет. Необходимо слегка увеличивать частоту лазера, чтобы захватить также атомы с более низкими скоростями.

5. Интенсивность пучка достаточно высокая. Поэтому можно считать, что как только атом излучил фотон, он тут же поглотит следующий. Время жизни в возбуждённом состоянии находим и соотношения неопределённости:

$$\tau \approx \frac{h}{\Delta E} \approx 10^{-7} \text{ с} \quad (15).$$

Для охлаждения самых «горячих» атомов ($v_{\max} = 1000 \text{ М/с}$) потребуется

$$N = \frac{1000 \text{ М/с}}{0.03 \text{ М/с}} \approx 3000 \quad (16)$$

циклов поглощение-излучение. Т.е. для полного охлаждения понадобится время

$$T = N\tau \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ с} \quad \underline{3 \text{ мс}} \quad (17).$$

Таким образом, охлаждение светом – довольно быстрый процесс, длительность которого не более одной миллисекунды.

После каждого акта торможения, скорость в направлении Ox уменьшается на 3 М/с за время 10^{-7} с , т.е. можно сказать, что атомы двигаются с ускорением

$$a = \frac{\Delta v}{\tau} \approx 3 \cdot 10^5 \text{ М/с}^2 \quad (18).$$

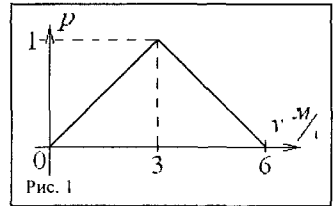
Тогда путь, который пройдет «горячие» будет равен

$$S = \frac{v_0^2}{2a} \approx 2 \text{ м} \quad (19).$$

6. При такой энергии фотонов, в процессе поглощения могут участвовать только атомы, скорости которых лежат в интервале $(0; 2\Delta v_0)$ или

$(0 \text{ М/с}; 6 \text{ М/с})$. Причём при скорости $v = \Delta v_0 = c \frac{\Delta E}{2E_1} \approx 3 \text{ М/с}$ атомы поглощают

фотоны, с энергией, соответствующей переходу в центр возбуждённого состояния. В условии сказано, что в этом случае поглощение происходит практически со стопроцентной вероятностью. Для оценки, будем считать, что эта вероятность линейно уменьшается до нуля, для скорости 0 и 6 М/с (см. рис.1). Для нас больший



интерес представляет интервал до $3M/c$, на котором зависимость вероятности поглощения от скорости атома задается выражением

$$p(v) = \xi v \quad (20)$$

Необходимо уяснить, в чем принципиальная разница между процессами упругого и неупругого (поглощение) рассеяния. При поглощении, атом в среднем уменьшает свою скорость на величину $\Delta v = \frac{E_1}{mc}$, т.е. кинетическая энергия изменяется на величину

$$\Delta E = mv\Delta v = E_1 \frac{v}{c} \quad (21)$$

Разберемся, что происходит при упругом столкновении атома и фотона. При этом фотон произвольно изменяет направление своего движения и сообщает атому определенный импульс в произвольном направлении. Упруго рассеянный фотон разогревает атом. Максимальное изменение импульса атома происходит при лобовом соударении ($2\frac{E_\phi}{c}$). Можно считать, что в среднем атом получает импульс равный $\frac{E_\phi}{c}$. Причем направление этого импульса случайно, т.к. фотоны летят со всех сторон, поэтому среднее изменение импульса равно нулю. Однако увеличение кинетической энергии пропорционально среднему изменению квадрата импульса

$$\Delta E_+ = \frac{(\Delta p)^2}{2m} \quad (22)$$

Среднее значение $(\Delta p)^2$ не равно нулю. Для нашей оценки можно считать, что

$$\langle \Delta p \rangle^2 = N \frac{E_\phi^2}{c^2} \quad (23)$$

Теперь надо определиться, что понимать под N . На самом деле, это не только количество фотонов упруго рассеянных на атоме. Вспомним, что после поглощения, атом должен испустить фотон, а излучение также происходит в произвольном направлении. Т.е. N – это суммарное количество фотонов, попавших на атом за некоторый промежуток времени.

Итак, пусть за некоторый промежуток времени с атомом взаимодействует N фотонов. Все они приводят к среднему увеличению кинетической энергии на величину (23). Однако некоторая их часть приводит также и к охлаждению на величину (21). Число таких «охладителей» пропорционально вероятности процесса поглощения, т.е. пропорционально скорости атома

$$N = N p(v) = N \xi v \quad (24)$$

Через некоторый промежуток времени в ловушке установится равновесие, т.е. атомы будут двигаться с такой скоростью, что будут поглощать фотонов ровно столько, чтобы скомпенсировать разогрев, вызванный случайными процессами рассеяния ($\Delta E = \Delta E_+$). Т.е.

$$N \xi v E_1 \frac{v}{c} = N \frac{E_\phi^2}{2mc^2} \quad (25)$$

Из (25), считая, что $E_1 \approx E_\phi$ получим

$$mv^2 = \frac{1}{\xi} \frac{E_1}{2c} \quad (26)$$

Величину ξ мы вводили, как коэффициент пропорциональности между p и v

$$\xi = \frac{1}{\Delta v_0} = \frac{2E_1}{c\Delta E} \quad (27)$$

Подставляя это значение в (26), получим

$$mv^2 = \frac{\Delta E}{4} \quad (28)$$

Известна связь между кинетической энергией атомов и их температурой

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT \quad (29)$$

В итоге

$$T = \frac{1}{k} \frac{\Delta E}{12} \approx 0,1 \frac{\Delta E}{k} \approx 5 \cdot 10^{-5} K \quad (30)$$